Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Jun. Prof. Simon Brandhorst
Dr. C. Steinhart

7. Tutoriumsblatt zur Linearen Algebra II

Tutoriumsaufgabe 1.

Sei V ein Vektorraum mit Basis $B = (b_1, \dots, b_n)$ und $B^* := (b_1^*, \dots, b_n^*)$ die zugehörige duale Basis.

a) Zeigen Sie, dass für ein $f \in V^*$ die Basisdarstellung
$$f = \sum_{i=1}^{n} f(b_i) b_i^*$$
gilt.

b) Seien $f_1, \dots f_k \in V^*$. Zeigen Sie, dass $f_1, \dots, f_k$ genau dann linear unabhängig sind, wenn für die Matrix
$$A := \begin{pmatrix} f_1(b_1) & f_2(b_1) & \dots & f_k(b_1) \\ f_1(b_2) & f_2(b_2) & \ddots & f_k(b_2) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ f_1(b_n) & f_2(b_n) & \dots & f_k(b_n) \end{pmatrix}$$
$\operatorname{Rang}(A) = k$ gilt.

c) Gegeben sei der Vektorraum $P_2 := \{f(X) \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(f) \leq 2\}$ der Polynome von Grad kleiner gleich 2. Zeigen Sie, dass die drei Einsetzungshomomorphismen:
$$\begin{aligned} \iota_1 : P_2 \to \mathbb{R}, &\quad f(X) \mapsto f(1) \\ \iota_{-1} : P_2 \to \mathbb{R}, &\quad f(X) \mapsto f(-1) \\ \iota_2 : P_2 \to \mathbb{R}, &\quad f(X) \mapsto f(2) \end{aligned}$$
eine Basis von P_2^* bilden.

Tutoriumsaufgabe 2.

Gegeben seien die Basen $E := (e_1, e_2, e_3)$ und $B := (b_1, b_2, b_3)$ von $V := \mathbb{R}^3$ mit
$$b_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$
Seien weiterhin E^* und B^* die zugehörigen dualen Basen.

a) Bestimmen Sie $e_1^*(b_2)$ und $b_2^*(e_1)$.

b) Berechnen Sie die Basiswechselmatrizen $D_{E^*B^*}$ und $D_{B^*E^*}$.

Tutoriumsaufgabe 3.

Seien V und W endlich-dimensional[1], $\phi : V \to W$ ein Vektorraumhomomorphismus und

$$\phi^* : W^* \to V^*, f \mapsto f \circ \phi$$

die zugehörige duale Abbildung. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

a) Ist ϕ surjektiv, dann ist ϕ^* injektiv.

b) Ist ϕ^* surjektiv, dann ist ϕ injektiv.

c) **(etwas schwieriger)** Zeigen Sie die Rückrichtungen der beiden obigen Aussagen.

Tutoriumsaufgabe 4.

Welche der folgenden Abbildungen sind multilinear:

a) $M_1 : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X], \quad (f(X), g(X), h(X)) \mapsto f(0) \cdot g(-X) \cdot h(X^2)$

b) $M_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \quad (v, w, u) \mapsto (v_1, w_2, u_3)$

c) $M_3 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, \quad (v, w, u) \mapsto v_1 w_2 u_3 - 2 v_2 w_2 u_4$

[1] Das geht auch für unendlich-dimensionale Vektorräume. Man braucht dazu die Basisergänzung und lineare Fortsetzung für beliebige Vektorräume.