Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Jun. Prof. Simon Brandhorst
Dr. C. Steinhart

7. Übungsblatt zur Linearen Algebra II

Während dem gesamten Blatt sei $\mathbb{K}$ ein Körper und V, W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume.

Aufgabe 1. (4P + 2 Bonuspunkte)

Sei $\beta : V \times V \to \mathbb{K}$ eine Bilinearform. Wir betrachten die beiden Abbildungen

$$\begin{aligned} \rho : V \to V^*, &\quad v \mapsto \rho(v) := \beta(v, \bullet\,) \\ \text{d.h.} \quad \rho(v) : V \to \mathbb{K}, &\quad w \mapsto \beta(v, w) \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass ρ einen $\mathbb{K}$-Vektorraumhomomorphismus von V nach V^* definiert.

b) Zeigen Sie, dass ρ genau dann injektiv ist, wenn β nicht ausgeartet ist.

Sei ab nun V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und β ein Skalarprodukt.

c) Folgern Sie, dass für jedes $v^* \in V^*$ ein eindeutiges $v \in V$ existiert, sodass $v^*(w) = \beta(v, w)$ gilt.

d) Sei $\phi \in \text{End}(V)$ ein Endomorphismus, $\phi' \in \text{End}(V)$ die Adjungierte von ϕ und $\hat{\phi} \in \text{End}(V^*)$ die zu ϕ duale Abbildung. Zeigen Sie, dass dann $\hat{\phi} \circ \rho = \rho \circ \phi'$ gilt.

e) Sei $W := \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}_{fin}$ der $\mathbb{Q}$-Vektorraum der endlichen Folgen über $\mathbb{Q}$ (s. letztes Blatt). Zeigen Sie, dass der Dualraum W^* isomorph zu $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ dem Vektorraum der Folgen ist und damit insbesondere $W \not\simeq W^*$ gilt.
Hinweis: *Wenn $W \simeq U$ gilt, haben sie auch die gleiche Kardinalität.*

Aufgabe 2. (4P)

a) Seien V^{**}, W^{**} die Bidualräume von V und W und weiterhin

$$\begin{aligned} \Lambda_V : V \to V^{**} \quad &, v \mapsto \lambda_v \quad \text{mit} \quad \lambda_v : V^* \to \mathbb{K} \ , f \mapsto f(v) \\ \Lambda_W : W \to W^{**} \quad &, w \mapsto \lambda_w \quad \text{mit} \quad \lambda_w : W^* \to \mathbb{K} \ , f \mapsto f(w) \end{aligned}$$

die Einsetzungshomomorphismen aus der Vorlesung. Sei weiterhin $\phi : V \to W$ ein Vektorraumhomomorphismus und $\phi^{**} = (\phi^*)^* : V^{**} \to W^{**}$ die zugehörige biduale Abbildung. Zeigen Sie, dass dann $\phi^{**} \circ \Lambda_V = \Lambda_W \circ \phi$ gilt, d.h. das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\Lambda_V"] \arrow[d, "\phi"'] & V^{**} \arrow[d, "\phi^{**}"] \\ W \arrow[r, "\Lambda_W"] & W^{**} \end{tikzcd}$$

b) Seien $f, g \in V^* \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass f und g genau dann linear unabhängig sind, wenn ein $v \in V$ mit $\lambda_v(f) = 0$ und $\lambda_v(g) = 1$ existiert.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Mittwoch den 07. 06. 2023 um 14 Uhr vor der Saalübung abgegeben werden. Sie können das Übungsblatt entweder direkt im CMS hochladen, im Übungskasten 47 im Keller des Hörsaalgebäudes E 2.5 einwerfen oder zu Beginn der Saalübung abgeben. Schreiben Sie die Namen und Matrikelnummern aller Gruppenmitglieder sowie den Namen Ihres Tutors gut lesbar auf Ihre Abgabe.

Aufgabe 3. (4P)

a) Sei A eine $\mathbb{K}$-Algebra. Zeigen Sie, dass die Abbildung:

$$\mu_n : A \times \cdots \times A \to A, \quad (a_1, \ldots, a_n) \mapsto a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$$

eine multilineare Abbildung ist.

b) Sei $\beta : V \times V \to V$ eine bilineare Abbildung. Wir definieren die beiden Abbildungen

$$\beta \circ_1 \beta : V \times V \times V \to V, \quad (v_1, v_2, v_3) \mapsto \beta(\beta(v_1, v_2), v_3)$$
$$\beta \circ_2 \beta : V \times V \times V \to V, \quad (v_1, v_2, v_3) \mapsto \beta(v_1, \beta(v_2, v_3))$$

(i) Zeigen Sie, dass $\beta \circ_1 \beta$ eine multilineare Abbildung ist.

(ii) β induziert auf V die Verknüpfung $v \star w := \beta(v, w)$. Zeigen Sie, dass $\star$ genau dann assoziativ ist, wenn $\beta \circ_1 \beta = \beta \circ_2 \beta$ gilt.

Aufgabe 4. (2P+2P+1Bonuspunkt)

Sei $M : V \times \cdots \times V \to \mathbb{K}$ eine alternierende Multilinearform.

a) Seien $v_1, \ldots, v_n \in V$ linear abhängige Vektoren. Zeigen Sie, dass dann $M(v_1, \ldots, v_n) = 0$ gilt.

b) Sei $b_1, \ldots, b_n \in V$ eine Basis von V. Zeigen Sie, dass dann M vollständig durch $M(b_1, \ldots, b_n)$ bestimmt ist.

c) Zeigen Sie, dass die einzigen alternierenden Multilinearformen $M : \underbrace{\mathbb{K}^n \times \cdots \times \mathbb{K}^n}_{n-\text{mal}} \to \mathbb{K}$ von der Form $M(\,\bullet\,) = \lambda \det(\,\bullet\,)$ für ein $\lambda \in \mathbb{K}$ sind.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Mittwoch den 07. 06. 2023 um 14 Uhr vor der Saalübung abgegeben werden. Sie können das Übungsblatt entweder direkt im CMS hochladen, im Übungskasten 47 im Keller des Hörsaalgebäudes E 2.5 einwerfen oder zu Beginn der Saalübung abgeben. Schreiben Sie die Namen und Matrikelnummern aller Gruppenmitglieder sowie den Namen Ihres Tutors gut lesbar auf Ihre Abgabe.