Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Jun. Prof. Simon Brandhorst
Dr. C. Steinhart

6. Übungsblatt zur Linearen Algebra II

Aufgabe 1. (4P)

a) Ferdinands Großtante Elise sammelt als Hobby Nägel[1]. Da sie mittlerweile eine beachtliche Sammlung zusammen hat, möchte sie diese nun sortieren. Zuerst sortiert sie ihre Nägelsammlung nach Hersteller. Dabei stellt sie fest, dass sie von 11 Herstellern genau gleich viele Nägel besitzt, aber 6 Nägel übrig bleiben, die sie nicht zuordnen kann. Danach sortiert sie die Nägel nach sieben verschieden Farben und anschließend teilt sie ihre Nägel in fünf verschiedenen Größen ein. Hierbei fällt ihr auf, dass sowohl bei der Farbeneinteilung als auch bei der Größeneinteilung jeweils genau ein Nagel fehlt, damit alle Gruppen gleich groß sind. Daher beschließt sie, Ferdinand einen Höflichkeitsbesuch abzustatten und nebenbei zu schauen, ob er einen mittelgroßen, grünen Nagel besitzt.

   Wie viele Nägel besitzt Elise, wenn in ihr Nest weniger als 500 Nägel passen?

b) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{K}$ paarweise verschiedene Elemente. Zeigen Sie mit Hilfe des chinesischen Restsatzes, dass es für jede Menge $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ genau ein Polynom $f(X) \in \mathbb{K}[X]$ von Grad $\deg(f) < n$ mit $f(\mu_i) = \lambda_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$ gibt.

Aufgabe 2. (4P)

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine quadratische Matrix und $U, S \in U_n(\mathbb{C})$ zwei unitäre Matrizen, so dass $U A S = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ eine Diagonalmatrix mit positiven Einträgen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist.

a) Sei A nun zusätzlich normal. Zeigen Sie, dass dann $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Beträge der Eigenwerte von A sind.

b) Zeigen Sie mit einem Beispiel in $\mathbb{C}^{2\times 2}$, dass die Aussage aus a) für nicht normale Matrizen im Allgemeinen falsch ist.

[1] Siehe Übungsblatt 4 Aufgabe 2 der Algebra 2019 bzw. Übungsblatt 6 Aufgabe 5 der GGT 2022.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Mittwoch den 31. 05. 2023 um 14 Uhr vor der Saalübung abgegeben werden. Sie können das Übungsblatt entweder direkt im CMS hochladen, im Übungskasten 47 im Keller des Hörsaalgebäudes E 2.5 einwerfen oder zu Beginn der Saalübung abgeben. Schreiben Sie die Namen und Matrikelnummern aller Gruppenmitglieder sowie den Namen Ihres Tutors gut lesbar auf Ihre Abgabe.

Aufgabe 3. (4P)

Seien U, V, W unitäre Vektorräume und $\phi : U \to V$, $\psi : V \to W$ lineare Abbildungen.

a) Zeigen Sie, dass wenn ϕ und ψ jeweils Adjungierte besitzen, dann besitzt auch $\psi \circ \phi$ eine Adjungierte.

b) Sei ϕ invertierbar und hat eine invertierbare Adjungierte ϕ^*. Zeigen Sie, dass dann auch ϕ^{-1} eine Adjungierte besitzt.

c) Seien $U = V = W$ und ϕ sowie ψ normal. Zeigen Sie, dass dann $\phi \circ \psi$ nicht notwendigerweise normal ist.

d) Sei $B := (b_1, \dots, b_n)$ eine Orthonormalbasis von V. Zeigen Sie, dass wir dann ψ^* wie folgt berechnen können:

$$\psi^*(w) = \sum_{i=1}^{n} \langle\, w, \psi(b_i) \rangle \; b_i$$

Aufgabe 4. (4P)

Wir betrachten den Vektorraum $V := \mathbb{C}^{\mathbb{N}}_{fin} = \{(a_1, a_2, \dots, a_k, 0 \dots) \mid a_i \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{N}\}$ der endlichen Folgen zusammen mit dem Skalarprodukt

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle := \sum_{i=1}^{\infty} a_i \overline{b_i}.$$

Auf V betrachten wir die beiden Endomorphismen

$$L : V \to V, \quad (a_1, a_2, a_3, \dots) \mapsto (a_2, a_3, a_4, \dots)$$
$$\psi : V \to V, \quad (a_1, a_2, a_3, \dots) \mapsto (\sum_{i=1}^{\infty} a_i, 0, 0, \dots).$$

a) Bestimmen Sie die Adjungierte des Links-Shifts L.

b) Zeigen Sie dass ψ keine Adjungierte besitzt.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Mittwoch den 31. 05. 2023 um 14 Uhr vor der Saalübung abgegeben werden. Sie können das Übungsblatt entweder direkt im CMS hochladen, im Übungskasten 47 im Keller des Hörsaalgebäudes E 2.5 einwerfen oder zu Beginn der Saalübung abgeben. Schreiben Sie die Namen und Matrikelnummern aller Gruppenmitglieder sowie den Namen Ihres Tutors gut lesbar auf Ihre Abgabe.