Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Jun. Prof. Simon Brandhorst
Dr. C. Steinhart

6. Tutoriumsblatt zur Linearen Algebra II

Tutoriumsaufgabe 1.

Seien $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{N}$ paarweise verschiedene Primzahlen und $n := p_1 \cdot \ldots p_k$ ihr Produkt. Für jedes $i \in \{1, \dots, k\}$ betrachten wir die Abbildungen:

$$\varphi_i : \mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \quad x + p_i\mathbb{Z} \mapsto x \cdot \prod_{j \neq i} p_i + n\mathbb{Z}$$
$$\pi_i : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z}, \quad x + p_i\mathbb{Z} \mapsto x + n\mathbb{Z}$$

a) Zeigen Sie, dass φ_i eine wohldefinierte Abbildung ist.

b) Zeigen Sie, dass $\prod_{j \neq i} p_j$ eine Einheit in $\mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z}$ ist und folgern Sie, dass es ein $\lambda_i \in \mathbb{Z}$ gibt, sodass $\pi_i \circ (\lambda_i \cdot \varphi_i) = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z}}$ gilt.

c) Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{Z}$ wie in Teil b) gegeben. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{Z}/p_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/p_k\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \quad (x_1, \dots, x_k) \mapsto \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \varphi_i(x_i)$$

injektiv ist.

d) Folgern Sie, dass die Abbildung φ ein Ringisomorphismus ist.

e) Berechnen Sie alle Zahlen $k \in \mathbb{Z}$ mit

$$\begin{aligned} k &\equiv 0 \mod 3 \\ k &\equiv 2 \mod 5 \\ k &\equiv 3 \mod 13. \end{aligned}$$

f) Gehen die vorigen Aufgabenteile auch, wenn $p_1, \dots, p_k$ nur paarweise teilerfremd sind? Was ist mit beliebigen $p_1, \dots, p_k$?

g) Zeigen Sie, dass die Ringe $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ isomorph zu $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$ ist, aber $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ nicht isomorph zu $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$ ist.

Tutoriumsaufgabe 2.

a) Sei β eine nicht-ausgeartete Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$, nach LA 1 ist das genau dann der Fall, wenn die zugehörige Gram-Matrix invertierbar ist. Zeigen Sie, dass für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existiert, sodass die Gleichung

$$\beta(v, Aw) = \beta(\tilde{A}v, w)$$

für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$ gilt.

Wir betrachten ab jetzt auf $\mathbb{R}^2$ die ausgeartete, symmetrische Bilinearform

$$\gamma : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}, \quad (v, w) \mapsto v^t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot w.$$

b) Zeigen Sie, dass für die Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ keine Matrix $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ wie in Teil a) existiert.

c) Für welche Matrizen $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gibt es eine Matrix $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ wie in Teil a)? Ist solch eine Matrix $\tilde{A}$ eindeutig durch A bestimmt?

Tutoriumsaufgabe 3.

Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ seien V, W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume mit Skalarprodukt und $\phi : V \to W$ eine lineare Abbildung mit Adjungierter $\phi^* : W \to V$.

a) Zeigen Sie, dass ϕ^* selbst wieder eine Adjungierte besitzt.

b) Zeigen Sie, dass wenn ϕ surjektiv ist, dann ist ϕ^* injektiv.

c) Sei $V = W = \mathbb{R}[X]$ zusammen mit dem Skalarprodukt

$$\langle f(X), g(X)\rangle := \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

Bestimmen Sie die Adjungierte der Abbildung

$$\phi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X], \quad f(X) \mapsto X \cdot f(X).$$