Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Jun. Prof. Simon Brandhorst
Dr. C. Steinhart

5. Übungsblatt zur Linearen Algebra II

Aufgabe 1. (4P)

Wir wollen in dieser Aufgabe zeigen, dass der Gaußsche Zahlenring $\mathbb{Z}[i] := \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$ zusammen mit der üblichen (multiplikativen) Norm $\|a + bi\|^2 = a^2 + b^2$ ein euklidischer Ring ist. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

a) Für $r > 0$ und $x \in \mathbb{C}$ definieren wir mit $B_r(x) := \{y \in \mathbb{C} \mid |x - y| < r\}$ die Kugel mit Abstand r um x. Zeigen Sie, dass wir $\mathbb{C}$ mit Kugeln mit Abstand 1 um $\mathbb{Z}[i]$ überdecken können, d.h. es gilt

$$\mathbb{C} = \bigcup_{q \in \mathbb{Z}[i]} B_1(q).$$

b) Seien $g, q \in \mathbb{C}$ und $r = \|g\| > 0$. Zeigen Sie die Identität $g \cdot B_1(q) = B_r(g \cdot q)$.

c) Für $g \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $r := \|g\|$ definieren wir die Menge $\Gamma := \{g \cdot q \mid q \in \mathbb{Z}[i]\}$. Folgern Sie aus Aufgabenteil a) und b) die Identität

$$\mathbb{C} = \bigcup_{x \in \Gamma} B_r(x).$$

d) Folgern Sie, dass $\mathbb{Z}[i]$ mit der Bewertung $\varphi : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{N}_0, z \mapsto \|z\|^2$ ein euklidischer Ring ist.

Aufgabe 2. (2P)

Gegeben seien die beiden Polynome

$$a(X) = X^5 - X^4 + 2X^3 - 3X^2 + 3X - 2 \quad \text{und} \quad b(X) = X^4 - 2X^3 + X - 2 \in \mathbb{R}[X]$$

Bestimmen Sie mit Hilfe des euklidischen Algorithmus einen größten gemeinsamen Teiler $h(X)$ von $a(X)$ und $b(X)$ und schreiben Sie ihn als Linearkombination

$$h(X) = a(X)f(X) + b(X)g(X).$$

Aufgabe 3. (4P)

Sei R ein Integritätsring und $g \in R$ ein Element mit Primfaktorzerlegung $g := p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k}$ in teilerfremde Primelemente p_i. Zeigen Sie, dass dann für jedes $h \in R$ folgende Äquivalenz gilt:

$$g \text{ teilt } h \iff \forall i \in \{1, \ldots, k\} : p_i^{n_i} \text{ teilt } h$$

Das Übungsblatt kann bis spätestens Mittwoch den 24. 05. 2023 um 14 Uhr vor der Saalübung abgegeben werden. Sie können das Übungsblatt entweder direkt im CMS hochladen, im Übungskasten 47 im Keller des Hörsaalgebäudes E 2.5 einwerfen oder zu Beginn der Saalübung abgeben. Schreiben Sie die Namen und Matrikelnummern aller Gruppenmitglieder sowie den Namen Ihres Tutors gut lesbar auf Ihre Abgabe.

Aufgabe 4. (4P)

Sei G eine Gruppe und $N, U \trianglelefteq G$ zwei Normalteiler.

a) Zeigen Sie, dass die Teilmenge

$$UN := \{un \mid u \in U, n \in N\}$$

eine normale Untergruppe von G ist.

b) Wir betrachten $U/N := \{uN \mid u \in U\}$ als normale Untergruppe von G/N (s. Tutoriumsblatt). Zeigen Sie, dass die beiden Quotientengruppen isomorph sind:

$$(G/N)\big/(U/N) \simeq G\big/(UN)$$

Aufgabe 5. (2P)

Sei G eine Gruppe und U eine Untergruppe.

a) Zeigen Sie, dass U genau dann normal ist, wenn die Nebenklassen gU und Ug für alle $g \in G$ gleich sind.

b) Sei nun U eine Untergruppe von Index 2, d.h. wir haben genau zwei Nebenklassen gU. Zeigen Sie, dass dann U bereits ein Normalteiler ist.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Mittwoch den 24. 05. 2023 um 14 Uhr vor der Saalübung abgegeben werden. Sie können das Übungsblatt entweder direkt im CMS hochladen, im Übungskasten 47 im Keller des Hörsaalgebäudes E 2.5 einwerfen oder zu Beginn der Saalübung abgeben. Schreiben Sie die Namen und Matrikelnummern aller Gruppenmitglieder sowie den Namen Ihres Tutors gut lesbar auf Ihre Abgabe.