Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Jun. Prof. Simon Brandhorst
Dr. C. Steinhart

5. Tutoriumsblatt zur Linearen Algebra II

Tutoriumsaufgabe 1.

Berechnen Sie mit Hilfe des euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler von $a = 714$ und $b = 546$ und schreiben Sie ihn als Linearkombination $\mathrm{ggT}(a, b) = ax + by$.

Tutoriumsaufgabe 2.

Sei R ein faktorieller Integritätsring, d.h. jedes Element $x \in R$ hat eine (eindeutige) Primfaktorzerlegung. Seien weiterhin $a, b \in R$ zwei beliebige Elemente.

a) Zeigen Sie, dass a und b einen größten gemeinsamen Teiler und ein kleinstes gemeinsames Vielfaches besitzen.
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis Aufgabe 3 auf dem aktuellen Übungsblatt benutzen.

b) Seien $\mathrm{ggT}(a, b)$ und $\mathrm{kgV}(a, b)$ ein größter gemeinsamer Teiler bzw. ein kleinstes gemeinsames Vielfaches von a und b. Zeigen Sie, dass dann eine Einheit $\varepsilon \in R^\times$ existiert, sodass die Gleichung
$$\varepsilon \cdot \mathrm{ggT}(a, b) \cdot \mathrm{kgV}(a, b) = a \cdot b$$
gilt, d.h. das Produkt von ggT und kgV sind assoziiert zum Produkt der beiden Elemente.

Tutoriumsaufgabe 3.

Wir betrachten die symmetrische Gruppe S_4 zusammen mit den Untergruppen
$$K_4 := \langle\ (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4)\ \rangle$$
$$C_2 := \{(1\,2)(3\,4), \mathrm{id}\}$$

a) Zeigen Sie, dass K_4 eine normale Untergruppe von S_4 und C_2 eine normale Untergruppe von K_4 ist.

b) Zeigen Sie, dass C_2 keine normale Untergruppe von S_4 ist.

c) Zeigen Sie, dass für die Nebenklassen S_4/K_4 die Verknüpfung
$$\circ : \sigma C_2 \times \tau C_2 \mapsto (\sigma \circ \tau) C_2$$
nicht wohldefiniert ist.

d) Sei $N \trianglelefteq S_n$ ein Normalteiler der $(1\,2)$ enthält. Zeigen Sie, dass dann bereits $N = S_n$ gilt.

Tutoriumsaufgabe 4.

Sei G eine Gruppe und $U, N \trianglelefteq G$ zwei Normalteier.

a) Zeigen Sie, dass dann $U \cap N$ ein Normalteiler von G ist.

b) Zeigen Sie, dass $UN/N \simeq U/N := \{uN \mid u \in U\}$ gilt.

c) Zeigen Sie, dass U/N ein Normalteiler von G/N ist.

d) Sei H eine weitere Gruppe und $\varphi : H \to G$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie, dass dann $\varphi^{-1}(N)$ ein Normalteiler von H ist.