Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Jun. Prof. Simon Brandhorst
Dr. C. Steinhart

4. Tutoriumsblatt zur Linearen Algebra II

Tutoriumsaufgabe 1.

Sei R ein kommutativer Ring und $a, b \in R$. Seien weiterhin $I := Ra$ und $J := Rb$ jeweils ihre erzeugte Hauptideale. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

a) a teilt $b \iff J \subset I$.

b) Ein Ideal enthält a und b, genau dann, wenn es $I + J$ enthält.

c) Ein Ideal das $I \cap J$ enthält, enthält auch $a \cdot b$.

Tutoriumsaufgabe 2.

Wir betrachten den Ring $R := \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ der stetigen Funktionen von $[0,1]$ nach $\mathbb{R}$ mit punktweiser Addition und Multiplikation.

a) Bestimmen Sie die Einheitengruppe $R^\times$.

b) Wie sehen die Assoziiertheitklassen aus? Können Sie jede Klasse mit endlich vielen Werten beschreiben?

Tutoriumsaufgabe 3.

Wir betrachten den Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{3}] := \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\nu : \mathbb{Z}[\sqrt{3}] \to \mathbb{Z}, \quad a + b\sqrt{3} \mapsto a^2 - 3b^2$$

multiplikativ ist, d.h. für $r, s \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ gilt $\nu(r \cdot s) = \nu(r) \cdot \nu(s)$.

b) Zeigen Sie, dass wir die Einheitengruppe über die folgende Gleichung beschreiben können:

$$\mathbb{Z}[\sqrt{3}]^\times := \{a + b\sqrt{3} \mid N(a + b\sqrt{3}) = \pm 1\}.$$

c) Finden Sie eine Einheit $r \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}]^\times \setminus \{\pm 1\}$.

d) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ unendlich viele Einheiten hat.

e) Zeigen Sie, dass $1 + \sqrt{3}$ ein echter Teiler von 2 ist. Hat $1 + \sqrt{3}$ selbst echte Teiler?

f) Zeigen Sie, dass $x := 5 + 3\sqrt{3}$ assoziiert zu $1 + \sqrt{3}$ ist. Teilt x auch 2?