Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Jun. Prof. Simon Brandhorst
Dr. C. Steinhart

2. Tutoriumsblatt zur Linearen Algebra I

Tutoriumsaufgabe 1.

Gegeben seien zwei Mengen N und M und eine Abbildung $f : N \to M$. Für eine Teilmenge $U \in N$ definieren wir $f(U) := \{f(n) \mid n \in U\} \subseteq M$. Zeige oder widerlege folgende Aussagen für zwei Teilmengen $U, V \subseteq N$:

a) Sind $V \subseteq U$, dann gilt auch bereits $f(V) \subseteq f(U)$.

b) Gilt $f(V) \subseteq f(U)$, dann gilt auch bereits $V \subseteq U$.

c) $f^{-1}(f(U)) = U$.

d) Für $W \subseteq M$ gilt $f(f^{-1}(W)) = W$.

Tutoriumsaufgabe 2.

Beweise per Widerspruch, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

Tutoriumsaufgabe 3.

Sei N eine endliche Menge und $M \subseteq N$ eine Teilmenge.
Zeige per Induktion, dass wenn $\#N = \#M$ gilt, bereits $N = M$ folgt.

Tutoriumsaufgabe 4.

a) Sei N eine Menge mit $\#N = k$ Elementen und M eine Menge mit $\#M < k$. Zeige, dass keine injektive Abbildung $f : N \to M$ existiert. Das nennt sich *Schubfachprinzip*.

b) Zeige, dass es in Deutschland mehr als 700 Menschen gibt, die bis aufs Gramm genau gleich wiegen.

Tutoriumsaufgabe 5.

Seien N und M zwei nichtleere Mengen und $f : N \to M$ eine Abbildung. Zeige die folgenden Aussagen:

a) Ist f injektiv, dann gibt es eine Abbildung $g : M \to N$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_N$.

b) Zeige, dass in a) auch die Rückrichtung gilt, d.h. wenn ein entsprechendes g existiert, ist f bereits injektiv.

c) Seien $g, h : M \to N$ Links- bzw. Rechts-Inverse von f, d.h. es gilt $f \circ h = \mathrm{id}_M$ und $g \circ f = \mathrm{id}_N$. Zeige, dass dann bereits $g = h$ gilt.