Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Jun. Prof. Simon Brandhorst
Dr. C. Steinhart

# 2. Übungsblatt zur Linearen Algebra I

**Aufgabe 1. (4P)**

Gib jeweils (mit einer Begründung) an, ob die Abbildung injektiv, surjektiv oder bijektiv ist.

a) $f_1 : \{Dohlis, Euler, Ferdinand, Frieda\} \mapsto \{1,2,3,4\} \quad , \quad \begin{cases} Dohlis & \mapsto 2 \\ Euler & \mapsto 4 \\ Ferdinand & \mapsto 2 \\ Frieda & \mapsto 1 \end{cases}$

b) $f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \quad , \quad n \mapsto (-1)^n \lceil \frac{n}{2} \rceil$
Hierbei bezeichnet $\lceil \cdot \rceil$ Aufrunden zur nächsten ganzen Zahl.

c) $f_3 : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \quad , \quad (p,q) \mapsto \frac{p}{q}$

d) $f_4 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad , \quad (a,b) \mapsto (a+b)^2 + a$

**Aufgabe 2. (4P)**

a) Seien $N$ und $M$ Mengen und $f : M \to N$ eine Abbildung. Zeige, dass die Urbilder $f^{-1}(\{n\})$ für $n \in N$ eine *Partition* von $M$ sind, das heißt es gilt

- $M = \bigcup_{n \in N} f^{-1}(\{n\})$
- und $f^{-1}(\{n\}) \cap f^{-1}(\{n'\}) = \emptyset$ für alle $n, n' \in N$ mit $n \neq n'$.

Sprich $M$ ist die disjunkte Vereinigung der Mengen $f^{-1}(\{n\})$. Man schreibt dann auch $M = \bigsqcup_{n \in N} f^{-1}(\{n\})$.

b) Bestimme sämtliche Urbildmengen der Abbildung

$$f : \{1,2,3,4,5,6\} \to \mathbb{R} \quad , \quad x \mapsto \sin(\frac{\pi}{2} \cdot x) + (-1)^x.$$

Die benötigten Werte der Sinusfunktion sind:

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $3\frac{\pi}{2}$ | $2\pi$ | $5\frac{\pi}{2}$ | $3\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin(x)$ | $0$ | $1$ | $0$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $0$ |

Das Übungsblatt kann bis spätestens Montag den 14. 11. 2022 um 16 Uhr abgegeben werden. Sie können das Übungsblatt entweder direkt im CMS hochladen oder im Übungskasten 47 im Keller des Hörsaalgebäudes E 2.5 einwerfen. Schreiben Sie Ihren Namen und Matrikelnummer sowie den Namen Ihres Tutors gut lesbar auf Ihre Abgabe.

**Aufgabe 3. (4P)**

Für eine Menge $M$ ist eine *Auswahlfunktion* eine Abbildung

$$h_M : \mathcal{P}(M) \setminus \emptyset \to M \quad , \quad U \mapsto h_M(U) \in U$$

die aus jeder nichtleeren Teilmenge $U \subset M$ ein Element $h_M(U) \in U$ auswählt.

a) Gib eine Auswahlfunktion für die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ an.
*Bemerkung: Für $\mathbb{Q}$ kann man noch explizit solch eine Funktion angeben, für $\mathbb{R}$ geht das nicht. Das Auswahlaxiom besagt, dass für jede Menge eine Auswahlfunktion existiert.*

Sei ab nun $M$ eine Menge mit einer Auswahlfunktion $h_M$, $N$ eine weitere Menge und $f : M \to N$ eine Abbildung.

b) Zeige dass $f$ genau dann surjektiv ist, wenn eine Abbildung $g : N \to M$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_N$ existiert.

**Aufgabe 4. (4P)**

Sei $M$ eine endliche Menge und $f : M \to M$ eine Abbildung.

a) Zeige die folgende Äquivalenz:

$$f \text{ ist injektiv} \iff f \text{ ist surjektiv} \iff f \text{ ist bijektiv.}$$

b) Zeige, dass die Aussage aus a) falsch ist, wenn die Menge unendlich ist. D.h. finde eine unendliche Menge $N$ und eine Funktion $g : N \to N$ sodass entweder $g$ injektiv und nicht surjektiv ist oder $g$ surjektiv aber nicht injektiv ist.

---

Das Übungsblatt kann bis spätestens Montag den 14. 11. 2022 um 16 Uhr abgegeben werden. Sie können das Übungsblatt entweder direkt im CMS hochladen oder im Übungskasten 47 im Keller des Hörsaalgebäudes E 2.5 einwerfen. Schreiben Sie Ihren Namen und Matrikelnummer sowie den Namen Ihres Tutors gut lesbar auf Ihre Abgabe.