Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Jun. Prof. Simon Brandhorst
Dr. C. Steinhart

14. Tutoriumsblatt zur Linearen Algebra I

Tutoriumsaufgabe 1.

Wir betrachten $P_2 := \{f(X) \in \mathbb{C}[X] \mid \deg(f(X)) \leq 2\}$ zusammen mit der Abbildung

$$h : P_2 \times P_2 \to \mathbb{C}, \quad (f(X), g(X)) \mapsto \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt.$$

a) Zeige, dass h ein Skalarprodukt auf P_2 definiert.

b) Bestimme die Gram-Matrix von h bezüglich der Basis $\{1, X, X^2\}$.

c) Finde eine ONB von P_2 bezüglich h.

d) Was ist der Abstand von X^2 zur von 1 und X aufgespannten Ebene?

Tutoriumsaufgabe 2.

Wir betrachten $\mathbb{R}^3$ mit dem Standard-Skalarprodukt und das Viereck mit den Eckpunkten

$$A := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, B := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, C := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, D := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimme jeweils die Innenwinkel des Vierecks an den Ecken und ihre Summe. Kannst Du ein Viereck angeben, dessen Innenwinkelsumme beliebig klein wird?

Tutoriumsaufgabe 3.

Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eine orthogonale Matrix .

a) Sei $\det(A) = 1$. Zeige, dass die Matrizenmultiplikation $v \mapsto A \cdot v$ eine Gerade fixiert und die dazu orthogonale Ebene dreht. Man nennt die fixierte Gerade dann die Drehachse von A.

b) Sei $\det(A) = -1$. Zeige, dass dann A eine Drehspiegelung ist, d.h. es existiert eine Ebene $E \leq \mathbb{R}^3$, sodass A die Ebene E dreht und anschließend an E spiegelt.

Tutoriumsaufgabe 4.

Gib jeweils an, ob es sich bei den folgenden Matrizen um Drehungen, Spiegelungen oder Drehspiegelungen handelt und bestimme gegebenenfalls die Drechachse:

$$A := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$C := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad E := B \cdot C.$$

Tutoriumsaufgabe 5.

Zeige, dass jede Drehung in $\mathbb{R}^2$ als Komposition von zwei Spiegelungen geschrieben werden kann.

Tutoriumsaufgabe 6.

Zeige, dass die Menge der unitären Matrizen $U(n)$ tatsächlich eine Gruppe ist.