Fachrichtung Mathematik
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität des Saarlandes
Jun. Prof. Dr. Simon Brandhorst

Saarbrücken, 16. Februar 2023

(Pro-)Seminar Quadratische Formen

Sommersemester 2023

Welche ganzen Zahlen sind die Summe von zwei, drei oder vier Quadraten, d.h. welche $n \in \mathbb{Z}$ sind von der Form $n = x^2 + y^2$, $n = x^2 + y^2 + z^2$ oder $n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ mit $x, y, z, t \in \mathbb{Z}$? Die Antworten auf diese Frage wurden von Euler, Lagrange und Legendre bereits im im 18. Jahrhundert gegeben.

Eine quadratische Form über den ganzen Zahlen ist ein homogenes quadratisches Polynom der Form

$$Q(X_1, \dots X_d) = \sum_{i \leq j} a_{ij} X_i X_j \in \mathbb{Z}[X_1, \dots X_d].$$

Es stellt sich allgemein die Frage: Für welche $n \in \mathbb{Z}$ ist $Q(x_1, \dots, x_d) = n$ lösbar mit $(x_1, \dots x_d) \in \mathbb{Z}^d$?

Fragt man schwächer nach rationalen Lösungen, so gibt der Satz von Hasse und Minkowski eine befriedigende Antwort: Es gibt genau dann eine rationale Lösung, wenn es eine reelle und für jede Primzahl p eine p-adische Lösung gibt.

Quadratische Formen und Gitter haben vielfältige Bezüge zur Topologie, Algebraischen Geometrie, Funktionentheorie, Codes, Gruppen, und Computeralgebra. In 2022 erhielt Maryna Viazovska eine Fields Medaille für ihren Beweis, dass das E_8 Gitter die dichteste Kugelpackung in 8 Dimensionen liefert. Obschon sie seit Jahrhunderten studiert werden, sind quadratische Formen also ein aktuelles Forschungsgebiet.

Anmeldung:
Bitte melden Sie sich bei Interesse bis zum 15. März unter
brandhorst@math.uni-sb.de
Die Vorbesprechung findet am 22. März um 10 Uhr in SR 6 statt.

Vorkenntnisse:
Lineare Algebra I

Literatur:

1. J.W.S. Cassels: *Rational Quadratic Forms*, Academic press.
2. J.P. Serre: *A course in arithmetic*, Springer.
3. M. Kneser: *Quadratische Formen*, Springer.