Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Jun. Prof. Simon Brandhorst
Dr. C. Steinhart

# 14. Übungsblatt zur Linearen Algebra I

Alle Punkte auf diesem Blatt sind Bonuspunkte

**Aufgabe 1. (4P)**

Wir betrachten $\mathbb{R}^4$ mit dem Standard-Skalarprodukt und den Untervektorraum

$$U := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

a) Bestimme eine Orthonormalbasis von $U$.

b) Bestimme eine Basis des orthogonalen Komplements $U^\perp$.

c) Sei $V$ ein Vektorraum mit Skalarprodukt, $W \leq V$ ein Untervektorraum und $v \in V$ ein beliebiger Vektor. Wir definieren den Abstand von $v$ zu $W$ als

$$d(v, W) := \inf_{w \in W} d(v, w).$$

Zeige, dass $d(v, W) = d(v, \pi_W(v))$ gilt.

d) Bestimme den Abstand von $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ zu $U$.

**Aufgabe 2. (4P)**

a) Sei $V$ ein unitärer Vektorraum und $v, w \in V$ zwei Vektoren. Zeige, dass wir das Skalarprodukt von $v$ und $w$ wie folgt mit den Normen berechnen können:

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{4}(\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2 + i\|v + iw\|^2 - i\|v - iw\|^2)$$

b) Sei $V$ ein euklidischer Vektorraum, $U \leq V$ ein zweidimensionaler Untervektorraum und $v \in V \setminus \{0\}$ ein Vektor. Sei weiterhin $\alpha := \measuredangle(v, \pi_U(v))$ der Winkel zwischen $U$ und $v$. Zeige, dass es für jedes $\beta \in [\alpha, \pi - \alpha]$ einen Vektor $u \in U$ mit $\measuredangle(v, u) = \beta$ gibt.

---

Das Übungsblatt kann bis spätestens Montag den 13. 02. 2023 um 16 Uhr abgegeben werden. Sie können das Übungsblatt entweder direkt im CMS hochladen oder im Übungskasten 47 im Keller des Hörsaalgebäudes E 2.5 einwerfen. Schreiben Sie Ihren Namen und Matrikelnummer sowie den Namen Ihres Tutors gut lesbar auf Ihre Abgabe.

**Aufgabe 3. (4P)**

Wir betrachten den $\mathbb{C}$-Vektorraum

$$\mathbb{C}_b^{\mathbb{N}} := \{(a_1, a_2, \dots,) \in \mathbb{C}_b^{\mathbb{N}} \mid \exists C \in \mathbb{R} : \forall k : |a_k| < C\}$$

der beschränkten Folgen über $\mathbb{C}$.

a) Zeige, dass die Abbildung:

$$h : \mathbb{C}_b^{\mathbb{N}} \times \mathbb{C}_b^{n} \to \mathbb{C}, \quad ((a_k)_{k\in\mathbb{N}}, (b_k)_{k\in\mathbb{N}}) \mapsto \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{a_k \cdot \overline{b_k}}{k^2}$$

ein Skalarprodukt definiert.

b) Wir betrachten den Untervektorraum

$$\mathbb{C}_0^{\mathbb{N}} := \{(a_1, a_2, \dots) \mid \exists K \in \mathbb{N} : \forall k > K : a_k = 0\}$$

der endlichen Folgen. Zeige, dass für das Skalarprodukt aus a) das orthogonale Komplement $(\,\mathbb{C}_0^{\mathbb{N}}\,)^{\perp} = \{0\}$ ist.

**Aufgabe 4. (4P)**

a) Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine unitäre Matrix. Zeige, dass dann $|\det(A)| = 1$ gilt.

b) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine orthogonale Matrix. Zeige, dass $A + A^t$ diagonalisierbar ist. Wie hängen die Eigenwerte von $A + A^t$ mit den Eigenwerten und Drehkästchen von $A$ zusammen?

**Aufgabe 5. (4P)**

a) Gib für $k = 1, 2, 3$ jeweils eine Matrix $D_k \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ an, die eine Drehung um den $k$-ten Einheitsvektor mit dem Drehwinkel $\frac{\pi}{2}$ beschreibt.

b) Berechne $D_1 \circ D_3$ und $D_3 \circ D_1$ sowie deren Drehachsen und Drehwinkel.

c) Bestimme die Drehachsen und Drehwinkel der beiden Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

d) Wir betrachten den 6-seitigen Würfel mit den acht Eckpunkten $\begin{pmatrix} \pm 1 \\ \pm 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$, der von den Matrizen $A$ und $B$ aus Teil c) auf sich selbst abgebildet wird. Erhält man alle 24 Drehungen des Würfels durch Produkte von $A$ und $B$?

---

Das Übungsblatt kann bis spätestens Montag den 13. 02. 2023 um 16 Uhr abgegeben werden. Sie können das Übungsblatt entweder direkt im CMS hochladen oder im Übungskasten 47 im Keller des Hörsaalgebäudes E 2.5 einwerfen. Schreiben Sie Ihren Namen und Matrikelnummer sowie den Namen Ihres Tutors gut lesbar auf Ihre Abgabe.