

12. TUTORIUMSBLATT ZUR LINEAREN ALGEBRA I

Tutoriumsaufgabe 1.

Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

über den Körpern $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3, \mathbb{F}_5, \mathbb{R}$ und \mathbb{C} .

Tutoriumsaufgabe 2.

Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ eine obere Dreiecks-Matrix. Zeige, dass jeder Eintrag auf der Diagonalen ein Eigenwert ist.

Tutoriumsaufgabe 3.

a) Berechne die Determinante der Matrix

$$A_t := \begin{pmatrix} 1 & t & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & t+1 & 0 \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit des Parameters $t \in \mathbb{R}$. Für welche Werte von t ist die Matrix invertierbar?

b) Berechne die Determinante der Matrix

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix}.$$

c) Gegeben sei die $n \times n$ -Matrix $C_n = (c_{i,j})_{i,j}$ mit den Einträgen

$$c_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{falls } |i-j| = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Schreibe C_n für $n = 4$ und $n = 5$ auf und berechne ihre Determinanten. Was ist die Determinante von C_n für allgemeines n ?

Tutoriumsaufgabe 4.

Sei V ein endlich-dimensionaler \mathbb{K} -Vektorraum und $\phi : V \rightarrow V$ ein Endomorphismus. Zeige, dass die Determinante $\det(\phi) := \det(D_{BB}(\phi))$ nicht von der Wahl der Basis B abhängt.

Aufgabe 5. (4P)

Wir betrachten den \mathbb{R} -Vektorraum $C^\infty(\mathbb{R})$ der unendlich oft differenzierbaren Funktionen auf \mathbb{R} zusammen mit der Ableitung als \mathbb{R} -Vektorraumendomorphismus

$$\phi : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}) \quad , \quad f \mapsto f'.$$

a) Zeige, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^x$ ein Eigenvektor von ϕ ist. Was ist der zugehörige Eigenwert?

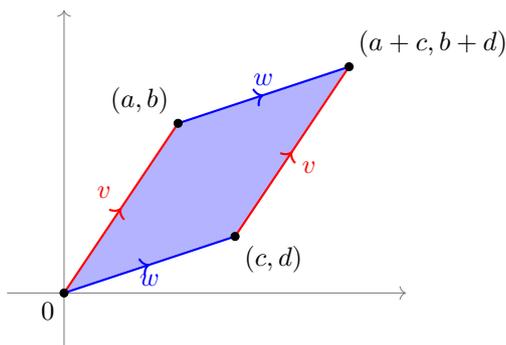
b) Wir betrachten den Endomorphismus

$$\phi : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X], \quad f(X) = \sum_{i=0}^n a_i X^i \mapsto f'(X) := \sum_{i=1}^n a_i \cdot i X^{i-1}.$$

Zeige, dass ϕ nur den Eigenwert 0 besitzt.

Tutoriumsaufgabe 6.

Gegeben seien zwei Vektoren $v := \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, w := \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ mit $a, b, c, d > 0$. Berechne den Flächeninhalt des von ihnen aufgespannten Parallelogramms



und vergleiche den Flächeninhalt mit $\det(v \mid w)$.