Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Jun. Prof. Simon Brandhorst
Dr. C. Steinhart

10. Tutoriumsblatt zur Linearen Algebra I

Tutoriumsaufgabe 1.

Sei V ein Vektorraum und $v_1, \ldots, v_n \in V$ linear unabhängige Vektoren. Zeige die Gleichheit

$$\langle v_1, \ldots, v_n \rangle = \{w \in V \mid v_1, \ldots, v_n, w \text{ linear abhängig}\}.$$

Tutoriumsaufgabe 2.

Seien V und W zwei endlich-dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume. Zeige, dass V und W genau dann isomorph sind, wenn $\dim(V) = \dim(W)$ gilt.

Tutoriumsaufgabe 3.

Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $U \leq V$ ein Untervektorraum. Wir sagen ein anderer Untervektorraum $W \leq V$ ist ein *Komplement* zu U, wenn $V = U + W$ und $U \cap W = \{0\}$ gilt.

a) Finde ein Komplement von $U := \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle \leq \mathbb{R}^3$.

Kannst Du noch ein weiteres Komplement finden?

b) Zeige, dass jeder Untervektorraum $U \leq V$ ein Komplement $W \leq V$ besitzt. Zeige, dass für diesen $\dim(W) + \dim(U) = \dim(V)$ gilt.

c) Zeige, dass wenn $\dim(U) = \dim(V)$ gilt, bereits $U = V$ folgt.

Tutoriumsaufgabe 4.

Wir betrachten den Raum $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} := \{(a_1, a_2, \ldots) \mid a_i \in \mathbb{R}\}$ der reellen Folgen mit punktweiser Verknüpfung als $\mathbb{R}$-Vektorraum. Zeige, dass die beiden Mengen $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ keine Basen von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sind:

a) Für $i \in \mathbb{N}$ definieren wir die Folge

$$v_i := (a_j)_{j \in \mathbb{N}} \text{ mit } a_j = \begin{cases} 1, & \text{falls j=i} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

und setzen $M_1 := \{v_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

b) $M_2 := \{(1, a_2, a_3, \ldots) \mid a_i \in \mathbb{R}\}$ die Menge der Folgen, die mit 1 anfangen.

Tutoriumsaufgabe 5.

Bestimme jeweils eine Basis und die Dimension von

$$U := \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$$

als Untervektorraum von $\mathbb{K}^4$ für $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3, \mathbb{F}_5$.