Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Jun. Prof. Simon Brandhorst
Dr. C. Steinhart

10. Übungsblatt zur Linearen Algebra I

Aufgabe 1. (4P)

Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum

$$\begin{aligned} P_3 &:= \{f \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(f) \leq 3\} \\ &= \{f(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

der reellen Polynome von Grad kleiner gleich 3 mit der üblichen Addition und Multiplikation.

a) Zeige, dass die Menge $U := \{f \in P_3 \mid f(0) = 0 \text{ und } f(1) = 0\}$ ein Untervektorraum von P_3 ist und bestimme eine Basis B von U.

b) Zeige, dass $B \cup \{X, X - 1\}$ eine Basis von P_3 ist.

Aufgabe 2. (4P)

a) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{K}^n$ Vektoren. Zeige die folgende Äquivalenz:

$$v_1, \dots, v_n \text{ ist eine Basis von } \mathbb{K}^n \iff \text{die Matrix } (v_1 \mid \cdots \mid v_n) \text{ ist invertierbar.}$$

b) Beweise die folgende Formel für die Anzahl der invertierbaren $n \times n$-Matrizen über $\mathbb{F}_p$

$$\# \operatorname{GL}_n(\mathbb{F}_p) = \prod_{i=0}^{n-1} (p^n - p^i).$$

Aufgabe 3. (4P)

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $U, W \leq V$ zwei endlich-dimensionale Untervektorräume.

a) Zeige, dass für die Dimensionen folgende Gleichheit gilt:

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W).$$

Hinweis: Ergänze eine Basis von $U \cap W$.

b) Zwei Ebenen[1] $E_1 = v_1 + U_1$ und $E_2 = v_2 + U_2$ heißen parallel, wenn $U_1 = U_2$ gilt. Zeige, dass zwei Ebenen $E_1, E_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ entweder parallel sind oder als Schnitt eine Gerade haben.

[1] Eine Ebene $E := v + U := \{v + u \mid u \in U\}$ ist die Verschiebung eines zweidimensionalen Vektorraums $U \leq V$ um einen Vektor $v \in V$. Eine Gerade ist das gleiche für einen eindimensionalen Vektorraum U.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Montag den 16. 01. 2023 um 16 Uhr abgegeben werden. Sie können das Übungsblatt entweder direkt im CMS hochladen oder im Übungskasten 47 im Keller des Hörsaalgebäudes E 2.5 einwerfen. Schreiben Sie Ihren Namen und Matrikelnummer sowie den Namen Ihres Tutors gut lesbar auf Ihre Abgabe.

Aufgabe 4. (4P)

Wir betrachten die folgenden Vektoren in $\mathbb{K}^3$

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Beantworte (wie immer mit Begründung) für die drei Körper $\mathbb{K} := \mathbb{F}_3, \mathbb{F}_5, \mathbb{F}_7$ die folgenden Fragen:

a) Ist v_1, v_2, v_3 eine Basis von $\mathbb{K}^3$?

b) Gilt $w \in \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$?

Das Übungsblatt kann bis spätestens Montag den 16. 01. 2023 um 16 Uhr abgegeben werden. Sie können das Übungsblatt entweder direkt im CMS hochladen oder im Übungskasten 47 im Keller des Hörsaalgebäudes E 2.5 einwerfen. Schreiben Sie Ihren Namen und Matrikelnummer sowie den Namen Ihres Tutors gut lesbar auf Ihre Abgabe.