Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Jun. Prof. Simon Brandhorst
Dr. C. Steinhart

9. Tutoriumsblatt zur Linearen Algebra I

Tutoriumsaufgabe 1.

Ein kommutativer Ring $(R, +, \cdot)$ heißt *Integritätsbereich*, wenn für alle $a, b \in R$ die folgende Äquivalenz gilt:

$$a \cdot b = 0 \iff a = 0 \text{ oder } b = 0$$

a) Zeige, dass jeder Körper ein Integritätsbereich ist.

b) Zeige, dass $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ genau dann ein Integritätsbereich ist, wenn n eine Primzahl ist.

c) Zeige, dass jeder endliche Integritätsbereich bereits ein Körper ist.

d) Zeige, dass die Charakteristik eines Körpers entweder 0 oder eine Primzahl ist.

Tutoriumsaufgabe 2.

Gegeben sei die Menge $M := \{0, 1, a, b\}$. Fülle die folgenden Verknüpfungstabellen so aus, damit $(M, +, \bullet)$ ein Körper wird.

$+$	0	1	a	b
0				
1				
a				
b				

$\bullet$	0	1	a	b
0				
1				
a				
b				

Tutoriumsaufgabe 3.

a) Zeige, dass zusammen mit der üblichen Multiplikation und Addition $\mathbb{R}$ ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum ist und $\mathbb{C}$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

b) Wir betrachten $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum. Zeige, dass $1, \sqrt{2}$ linear unabhängig sind.
Etwas schwieriger: Zeige, dass sogar $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ linear unabhängig sind.

Tutoriumsaufgabe 4.

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und V, W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume.

a) Zeige: Ist $\phi : V \to W$ ein bijektiver $\mathbb{K}$-Vektorraumhomomorphismus, dann ist die inverse Abbildung $\phi^{-1} : W \to V$ auch ein $\mathbb{K}$-Vektorraumhomomorphismus.

b) Wir bezeichnen mit $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}-VR}(V, W) := \{\phi : V \to W \mid \phi \text{ ist } \mathbb{K} - \text{linear}\}$ die Menge aller $\mathbb{K}$-Vektorraumhomomorphismen von V nach W. Zeige, dass $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}-VR}(V, W)$ zusammen mit den Verknüpfungen

$$\begin{aligned} (\phi + \psi) : V \to W, &\quad v \mapsto \phi(v) + \psi(v) \\ (\lambda \cdot \phi) : V \to W, &\quad v \mapsto \lambda \cdot \phi(v) \end{aligned}$$

selbst ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ist.

c) Sei $V = W = \mathbb{R}^2$. Zeige, dass die Abbildungen

$$\phi_1 : V \to V, \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \phi_2 : V \to V, \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$$

$$\phi_3 : V \to V, \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \phi_4 : V \to V, \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind und sogar eine Basis von $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}-VR}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ bilden.

Tutoriumsaufgabe 5.

Gegeben seien die Vektoren

$$v_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \in \mathbb{R}^3$$

a) Zeige, dass je zwei unterschiedliche v_i, v_j linear unabhängig sind, aber v_1, v_2, v_3 linear abhängig sind.

b) Zeige, dass v_1, v_2, w eine Basis sind.

c) Schreibe die drei Standardvektoren $e_i \in \mathbb{R}^3$ als Linearkombination von v_1, v_2, w, d.h. finde $\lambda_{i,j} \in \mathbb{R}$ mit $e_i = \lambda_{1,i} v_1 + \lambda_{2,i} v_2 + \lambda_{3,i} w$.

d) Was passiert, wenn man die Matrix $(v_1 \mid v_2 \mid w)$ mit der Matrix $\begin{pmatrix} \lambda_{1,1} & \lambda_{1,2} & \lambda_{1,3} \\ \lambda_{2,1} & \lambda_{2,2} & \lambda_{2,3} \\ \lambda_{3,1} & \lambda_{3,2} & \lambda_{3,3} \end{pmatrix}$ multipliziert?