Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Jun. Prof. Simon Brandhorst
Dr. C. Steinhart

5. Übungsblatt zur Linearen Algebra I

Aufgabe 1. (4P)

Gib jeweils mit einer Begründung oder einem Beispiel an, ob eine lineare Abbildung

$$f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

mit folgenden Funktionswerten existiert:

a)

$$f_1(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \qquad f_1(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \qquad f_1(\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

b)

$$f_2(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \qquad f_2(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, \qquad f_2(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$$

Erinnerung: Eine Abbildung $f : V \to W$ zwischen zwei $\mathbb{R}$-Vektorräumen heißt *linear*, wenn $f(u+v) = f(u) + f(v)$ und $f(\lambda v) = \lambda f(v)$ für alle $u, v \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt. Alternativ dürft ihr in dieser Aufgabe die Frage beantworten, ob es Matrizen A_i mit entsprechenden Multiplikationen gibt.

Aufgabe 2. (4P)

Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$.

a) Zeige, dass die Menge $W := \{b \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b \text{ hat eine Lösung}\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$ ist.

b) Sei $b \in \mathbb{R}^n$ so, dass für das zugehörige lineare Gleichungssystem $Ax = b$ die Lösungsmenge $\mathbb{L} := \{x \in \mathbb{R}^m \mid Ax = b\}$ nicht leer ist. Zeige, dass die Menge $U := \{x_1 - x_2 \mid x_1, x_2 \in \mathbb{L}\}$ ein Untervektorraum ist. Wie hängt U von b ab?

Aufgabe 3. (4P)

Gegeben seien

$$A := \begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b := \begin{pmatrix}\alpha\\0\\1\\\beta\end{pmatrix}.$$

Für welche Werte von $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ lösbar? Gib jeweils die homogene Lösungsmenge sowie die Lösungsmengen für $\alpha = \beta = 0$ und $\alpha = \beta = 1$ an.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Montag den 05. 12. 2022 um 16 Uhr abgegeben werden. Sie können das Übungsblatt entweder direkt im CMS hochladen oder im Übungskasten 47 im Keller des Hörsaalgebäudes E 2.5 einwerfen. Schreiben Sie Ihren Namen und Matrikelnummer sowie den Namen Ihres Tutors gut lesbar auf Ihre Abgabe.

Aufgabe 4. (4P)

Seien $n, m \in \mathbb{N}$ zwei natürliche Zahlen. Wir sagen zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ sind *äquivalent*, wenn zwei invertierbare Matrizen $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), T \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$ mit $A = S \cdot B \cdot T$ existieren. Wir schreiben dann $A \sim B$.

a) Zeige, dass „$\sim$" eine Äquivalenzrelation ist.

b) Zeige, dass es für $n = m = 2$ genau die drei Äquivalenzklassen

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_\sim, \quad \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_\sim, \quad \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_\sim$$

gibt.

Bemerkung: Die Aussage in b) besagt, dass zwei Matrizen in $\mathbb{R}^{2\times 2}$ genau dann äquivalent sind, wenn sie den selben Rang haben. Das gilt tatsächlich auch allgemein für $\mathbb{R}^{n\times m}$.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Montag den 05. 12. 2022 um 16 Uhr abgegeben werden. Sie können das Übungsblatt entweder direkt im CMS hochladen oder im Übungskasten 47 im Keller des Hörsaalgebäudes E 2.5 einwerfen. Schreiben Sie Ihren Namen und Matrikelnummer sowie den Namen Ihres Tutors gut lesbar auf Ihre Abgabe.