

Versteigerungen und verteiltes Entscheiden

Ideen und Konzepte der Informatik

Kurt Mehlhorn



mpi max planck institut
informatik

SIC Saarland
Informatics Campus

Versteigerungen, Auktionen

- Versteigerungen im Internet (ebay, Werbung bei Google und in sozialen Netzwerken, Werbung in on-line Medien wie etwa Spiegel-Online).
- optimales Verhalten bei einer einfachen Versteigerung (second price auction); optimal = nutzenoptimierend.

Verteiltes Entscheiden im Straßenverkehr

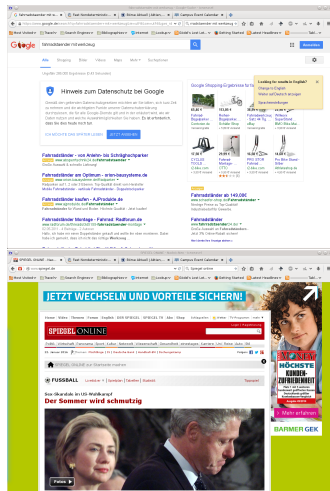
- soziales Optimum; ein wohlwollender Diktator weiß alles und entscheidet für alle.
- Nash Gleichgewicht; jeder entscheidet für sich.
- Cost of Anarchy = $\frac{\text{Kosten des Nash Gleichgewichts}}{\text{Kosten des sozialen Optimums}}$.
- Paradox von Braess: eine neue Straße verschlechtert das Nash Gleichgewicht.

- Frühe Informatiksysteme (bis 1990) wurden für Teams von Kolleginnen und Kollegen (kooperierenden Nutzern) entworfen.
- Heute müssen Systeme auch unter den Gesichtspunkten entworfen werden, dass
 - Nutzer anderen Nutzern bewusst schaden wollen (Vorlesung Kryptographie, Sicherheit, Privatheit) oder
 - Nutzer ihr Eigeninteresse verfolgen (heutige Vorlesung).
- Ein immer größerer Anteil unserer Wirtschaft läuft im Internet ab. Daher muss Preisbildung (Flugpreise, Benzinpreise, Preis eines Anzeigenplatzes, ...) und Zuteilung (wer bekommt das Gut) algorithmisiert werden.
- Viele Entscheidungen werden nicht zentral gefällt, sondern verteilt, z.B. im Verkehr oder im Internet
- **(Algorithmische) Spieltheorie** untersucht solche Fragen.



- Gewinnstrategien: Wie verhalte ich mich am besten, um mein Ziel zu erreichen?
- Welche Art von Zuständen stellt sich ein? Periodisches Verhalten, Chaotisches Verhalten, Gleichgewicht?
- Wie weit können Gleichgewichte vom dem gesamtgesellschaftlichen Optimum (soziales Optimum) abweichen, das man durch globale Steuerung erreichen könnte? Begriffsbildung: Preis der Anarchie (Price of Anarchy).
- Kann man Spielregeln aufstellen, die sicherstellen, dass sich trotz des Eigennutzes der Marktteilnehmer ein Gleichgewicht einstellt, das nahe am sozialen Optimum ist (mechanism design)? Tempolimits, Umweltprämie, Tabaksteuer.
- Wie schwer ist es, Spielregeln zu analysieren? Wie schwer ist es, Gleichgewichte auszurechnen?

- In einer Auktion wird der Käufer eines Guts, **dessen Wert unklar ist**, ermittelt. Ziel des Auktionators ist die Maximierung seiner Einnahmen.
- früher: Sotheby, Auftragserteilung in der Wirtschaft
- heute auch:
 - eBay
 - Ad Auctions bei Suchmaschinen und sozialen Netzwerken
 - Versteigerung von Werbung in Online Medien
 - Warum keine Anzeigenpreise?



Regeln der Versteigerung haben einen großen Einfluss auf Ausgang der Versteigerung (Gewinner, Einnahmen).

Versteigerung der Mobilfunk-Lizenzen in 2000

Geniale Regeln: 12 Frequenzblöcke wurden versteigert. Es gab 7 Bieter. Ein Teilnehmer musste zwei oder drei Frequenzblöcke ersteigern. Also, Anzahl der Gewinner $\in \{4, 5, 6\}$. Solange noch Interesse an mehr als 12 Blöcken bestand, wurde der Preis pro Block um 250 Mio Euro pro Tag erhöht.



Paul R. Milgrom, Robert B. Wilson, Nobelpreis 2020 für Verbesserungen der Auktionstheorie und Erfindung neuer Auktionsformate.

Die Versteigerung fand zwischen dem 31. Juli und dem 18. August 2000 statt. Erlöst wurden insgesamt etwa 50,8 Milliarden € (630 €/Bundesbürger).

Am 12. August 2000 (Gesamtpreis 32,2 Milliarden €) reduzierte sich die Anzahl der Bieter. Einige Bieter boten weiter auf drei Blöcke, um die Anzahl der Lizenznehmer zu reduzieren. Erst am 18. August ($6 \cdot 12 \cdot 250 \text{ Mio} = 18 \text{ Milliarden}$ später) beschränkten sich alle 6 Auktionsteilnehmer auf jeweils zwei Frequenzblöcke.

Regeln der Vickrey Versteigerung

Jeder Bieter gibt ein Gebot auf das Gut ab.

Der Höchstbietende gewinnt und bezahlt das zweithöchste Gebot.

Wird das Höchstgebot mehrmals abgegeben, so entscheidet das Los.

Frage: Welches Gebot soll man abgeben?

Dazu müssen wir den Begriff Nutzen präzisieren.

Beobachtung: **Ob** man gewinnt, hängt vom eigenen Gebot ab.
Was man zahlt, wenn man gewinnt, hängt nicht vom eigenen Gebot ab.

ebay, Sotheby: Ähnliche Preisregel, aber wiederholte Gebote.

Wie soll man sich verhalten? Optimales Verhalten?

Annahme: Jede Teilnehmerin weiß genau, welchen Wert in Euro das Gut für sie hat.

Nutzen der Auktion für die Teilnehmerin A?

$$\text{Nutzen für } A = \begin{cases} 0 & \text{falls } A \text{ verliert} \\ \text{Wert des Gutes für } A - \text{Preis, den } A \text{ bezahlen muss} & \text{falls } A \text{ gewinnt} \end{cases}$$

Falls A verliert, ist ihr Nutzen Null, da sie nichts bekommt und nichts bezahlt. Falls A gewinnt, ist ihr Nutzen die Differenz von Wert und Preis. ignoriert Kosten der Teilnahme

Präzisierung der Frage

Welches Gebot soll sie abgeben, um ihren Nutzen zu maximieren?



Wie soll man sich verhalten? Ein Gedankenexperiment

Sei W der Wert des Gutes für A und sei b_{max} das maximale Gebot der anderen Agenten. A kennt W aber nicht b_{max} .

$$b_{max} > W$$

Falls A gewinnt, ist ihr Nutzen negativ, weil sie b_{max} bezahlen muss. Das stimmt für jeden Wert von $b_{max} > W$.

Also sollte A nicht höher bieten als W .

$$b_{max} \leq W$$

Wenn A verliert, ist ihr Nutzen 0. Wenn A gewinnt, ist ihr Nutzen $W - b_{max}$. Das ist nichtnegativ (und im Allgemeinen positiv).

A maximiert ihre Gewinnaussichten, wenn sie W bietet.

Nutzenmaximierendes Verhalten bei Vickrey Auktions =
Biete den (subjektiven) Wert des Objekts.



Wie soll man sich verhalten? Ein Gedankenexperiment

Sei W der Wert des Gutes für A und sei b_{max} das maximale Gebot der anderen Agenten. A kennt W aber nicht b_{max} .

$$b_{max} > W$$

Falls A gewinnt, ist ihr Nutzen negativ, weil sie b_{max} bezahlen muss. Das stimmt für jeden Wert von $b_{max} > W$.

Also sollte A nicht höher bieten als W .

$$b_{max} \leq W$$

Wenn A verliert, ist ihr Nutzen 0. Wenn A gewinnt, ist ihr Nutzen $W - b_{max}$. Das ist nichtnegativ (und im Allgemeinen positiv).

A maximiert ihre Gewinnaussichten, wenn sie W bietet.

Nutzenmaximierendes Verhalten bei Vickrey Auktions =
Biete den (subjektiven) Wert des Objekts.



Wie soll man sich verhalten? Ein Gedankenexperiment

Sei W der Wert des Gutes für A und sei b_{max} das maximale Gebot der anderen Agenten. A kennt W aber nicht b_{max} .

$$b_{max} > W$$

Falls A gewinnt, ist ihr Nutzen negativ, weil sie b_{max} bezahlen muss. Das stimmt für jeden Wert von $b_{max} > W$.

Also sollte A nicht höher bieten als W .

$$b_{max} \leq W$$

Wenn A verliert, ist ihr Nutzen 0. Wenn A gewinnt, ist ihr Nutzen $W - b_{max}$. Das ist nichtnegativ (und im Allgemeinen positiv).

A maximiert ihre Gewinnaussichten, wenn sie W bietet.

Nutzenmaximierendes Verhalten bei Vickrey Auktions =
Biete den (subjektiven) Wert des Objekts.



Wie soll man sich verhalten? Ein Gedankenexperiment

Sei W der Wert des Gutes für A und sei b_{max} das maximale Gebot der anderen Agenten. A kennt W aber nicht b_{max} .

$$b_{max} > W$$

Falls A gewinnt, ist ihr Nutzen negativ, weil sie b_{max} bezahlen muss. Das stimmt für jeden Wert von $b_{max} > W$.

Also sollte A nicht höher bieten als W .

$$b_{max} \leq W$$

Wenn A verliert, ist ihr Nutzen 0. Wenn A gewinnt, ist ihr Nutzen $W - b_{max}$. Das ist nichtnegativ (und im Allgemeinen positiv).

A maximiert ihre Gewinnaussichten, wenn sie W bietet.

Nutzenmaximierendes Verhalten bei Vickrey Auktions =
Biete den (subjektiven) Wert des Objekts.



Satz

Sei W der Wert des Objekts für die Teilnehmerin A und sei N_W der Nutzen für A , wenn sie das Gebot W abgibt. Sei N_B der Nutzen für A , wenn sie das Gebot B abgibt. **Dann ist $N_W \geq N_B$.**

- Sei b_{max} das maximale Gebot der anderen Agenten.
- Falls der Ausgang für A mit beiden Geboten gleich ist, dann ist auch der Nutzen gleich. Also $N_W = N_B \geq N_B$.
- Falls A mit Gebot W gewinnt und mit Gebot B verliert, dann ist $W \geq b_{max} \geq B$ und daher

$$N_W = W - b_{max} \geq 0 = N_B.$$

- Falls A mit Gebot W verliert und mit Gebot B gewinnt, dann ist $W \leq b_{max} \leq B$ und daher

$$N_W = 0 \geq W - b_{max} = N_B.$$

First Price Auction

Wenn man gewinnt, bezahlt man das eigene Gebot. Wenn man verliert, bezahlt man nichts.

- Preis hängt jetzt auch vom eigenen Gebot ab. Man sollte daher ein Gebot abgeben, das knapp über den Geboten der anderen liegt, aber nicht über dem subjektiven Wert. Man muss überlegen, was die anderen machen werden.
- Wenn man W bietet und gewinnt, hat man Nutzen Null. Um positiven Nutzen zu erzielen, sollte man weniger als W bieten. Um wieviel weniger?
- Erlöß für den Auktionator:
 - Bei Second Price: zweithöchster subjektiver Wert.
 - Bei First Price: ????

Die Vickrey Auction ist ein Beispiel für den Entwurf von Spielregeln, so dass wahrheitsgemäßes Verhalten (truthfulness) der Marktteilnehmer für jeden Marktteilnehmer optimal ist. Es gibt keinen Grund, sich strategisch zu verhalten.

Dagegen: Deutsches Wahlsystem (fünf Prozent Hürde) verleitet zu strategischem Verhalten.

Was bedeutet unsere Analyse für Ihr Verhalten bei eBay Auktionen?

- Persönlich biete ich truthful, aber
- Objekte gibt es oft mehrmals und fester Endzeitpunkt der Auktion. Es kann sich lohnen, wiederholt zu bieten und erst gegen Ende der Auktion (aber zusätzlicher Aufwand).

Wie entscheidet Google, welche Anzeigen gezeigt werden?

The screenshot shows a Google search for "fahrradstaender mit werkzeug". The search bar is at the top, with the Google logo on the left and a search button on the right. Below the search bar, there are tabs for "Alle", "Shopping", "Bilder", "Videos", "Maps", "Mehr", and "Suchoptionen". The search results show "Ungefähr 285.000 Ergebnisse (0,43 Sekunden)".

A prominent white box with a blue shield icon contains a privacy notice titled "Hinweis zum Datenschutz bei Google". The text reads: "Gemäß den geltenden Datenschutzgesetzen möchten wir Sie bitten, sich kurz Zeit zu nehmen und die wichtigsten Punkte unserer Datenschutzerklärung durchzulesen, die für alle Google-Dienste gilt und in der erläutert wird, wie wir Daten nutzen und welche Auswahlmöglichkeiten Sie haben. Es ist erforderlich, dass Sie dies heute noch tun." Below the text are two buttons: "ICH MÖCHTE DAS SPÄTER LESEN" and "JETZT ANSEHEN".

Below the privacy notice, there are two search results for bicycle stands:

- Fahrradständer - von Anlehn- bis Schräghochparker**
Anzeige www.absperretechnik24.de/fahrradstaender ▼
Große Auswahl & schnelle Lieferung!
- Fahrradständer am Optimum - orion-bausysteme.de**
Anzeige www.orion-bausysteme.de/Radparker ▼

On the right side, there are "Google Shopping-Ergebnisse für fahrradstaender mit werkzeug". A yellow tooltip is visible over the results, containing the text: "Looking for results in English? Change to English Weiter auf Deutsch anzeigen Spracheinstellungen".

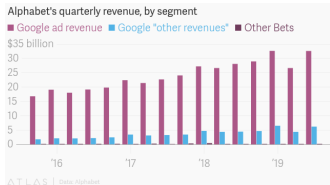
The shopping results are displayed in a grid:

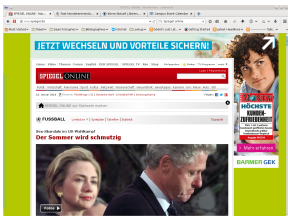
- 65,46 €**
Fahrrad-Bügelparker ...
Contorion.de
Versand gratis
- 113,05 €**
Reihen-Bügelparker, ...
Schäfer Shop
+ 5,89 € Versand
- 38,99 €**
Fahrradwerkzeug - Satz 44 Tlg ...
eBay
Versand gratis
- 22,90 €**
Willwox SuperStand ...
BMO Bike-Mat...
+ 3,90 € Versand
- 17,50 €**
CYCLUS TOOLS ...
r2-bike.com
+ 3,50 € Versand
- 29,99 €**
Fahrrad-Montage- ...
OTTO
+ 5,95 € Versand
★★★★ (4)
- 16,50 €**
PRO STOR Fahrrad ...
r2-bike.com
+ 3,50 € Versand
- 14,68 €**
Pro Bike Stand - Silber
Athleteshop.de
+ 4,95 € Versand

Ad Auctions (Google, Facebook, ...)

- Kunden bieten auf Schlagworte, z.B. Fahrradständer. Geben dafür ein Gebot ab.
- Google ordnet die Angebote nach dem Produkt von Gebot und ClickThroughRate.
- ClickThroughRate = Wahrscheinlichkeit, dass Anzeige (vom Suchenden) angeklickt wird (Erfahrungswert von Google).
- Das höchst eingeordnete Angebot gewinnt und wird auf dem prominentesten Platz gezeigt. Falls auf die Anzeige geklickt wird, wird das zweithöchste Gebot fällig.
- Ähnliche Regeln für die anderen Plätze.

Gebote gehen durchaus bis 10 € für Schlagworte wie Krankenversicherung und Behandlungsfehler.





- Ich rufe Spiegel Online auf.
- Spiegel Online schickt eine Nachricht an eine Ad Exchange (Unternehmen zum Verkauf von Werbeplätzen) mit dem Inhalt:
 - Wo würde Werbung platziert werden?
 - Kurzbeschreibung von KM: männlich, gutes Einkommen, ...
- Kunden der Ad Exchange, z.B. Feinschmeckerladen XX in SB, haben Angebote abgeben, z.B., gutes Einkommen, SB, Feinschmecker: 5 Euro für Click.
- Ad Exchange vergibt den Werbeplatz an den Meistbietenden. All das passiert in dem Zeitraum zwischen meiner Anfrage und dem Anzeigen der Webseite.

Verteiltes Entscheiden und Gleichgewichte



Straßenverkehr

Die Fahrzeit über eine Straße hängt von der Verkehrsdichte ab.
Konkret: Für jede Straße gibt es Konstanten $a \geq 0$ und $b \geq 0$ mit

$$\text{Fahrzeit} = (a + b \cdot \text{Anzahl der Autos}) \text{ Minuten}$$

Globales Optimum (Soziales Optimum) = minimale Gesamtfahrzeit aller Fahrer. Zentrale Entscheidung

Eine wohlwollender allwissender Diktator bestimmt optimale Strecken und teilt sie den Fahrern mit. Soziales Optimum ist in der Regel **NICHT** optimal für jeden Einzelnen.

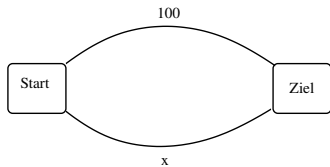
Welcher Zustand (Nash Gleichgewicht) stellt sich ein, wenn jeder Fahrer seine Route selbst bestimmt?

Ist er in der Nähe des sozialen Optimums?

$$\text{Price of Anarchy} = \text{Preis der Anarchy} = \frac{\text{Kosten des Nash Gleichgewichts}}{\text{Kosten des Sozialen Optimums}}$$



Globales Optimum versus Nash Gleichgewicht



100 Fahrer wollen von Start nach Ziel.

Globales Optimum

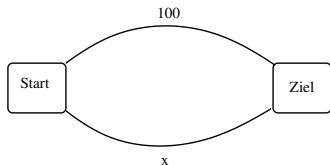
Wenn x Fahrer unten herum fahren, dann ist die Gesamtfahrzeit

$$F = x \cdot x + (100 - x) \cdot 100 = 10000 - 100x + x^2.$$

F is am kleinsten für $x = 50$. Dann ist die Gesamtfahrzeit 7.500.

- Lösung 1: Ableitung bilden und Null setzen, $F' =$
- Lösung 2: Quadratisch Ergänzen,
 $F = 7500 + 2500 - 100x + x^2 = 7500 + (50 - x)^2$
- Lösung 3: Zeichnen

Globales Optimum versus Nash Gleichgewicht



100 Fahrer wollen von Start nach Ziel.

Globales Optimum

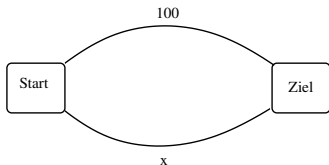
Wenn x Fahrer unten herum fahren, dann ist die Gesamtfahrzeit

$$F = x \cdot x + (100 - x) \cdot 100 = 10000 - 100x + x^2.$$

F is am kleinsten für $x = 50$. Dann ist die Gesamtfahrzeit 7.500.

Unten-Fahrer brauchen 50 Minuten, Oben-Fahrer brauchen 100 Minuten. Im Optimum werden also die Fahrer sehr ungleich behandelt. Wie kann das sein?

Globales Optimum versus Nash Gleichgewicht



100 Fahrer wollen von Start nach Ziel.

Globales Optimum

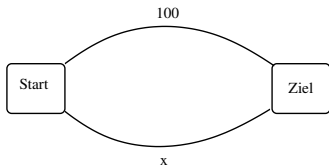
Wenn x Fahrer unten herum fahren, dann ist die Gesamtfahrzeit

$$F = x \cdot x + (100 - x) \cdot 100 = 10000 - 100x + x^2.$$

F ist am kleinsten für $x = 50$. Dann ist die Gesamtfahrzeit 7.500.

Unten-Fahrer brauchen 50 Minuten, Oben-Fahrer brauchen 100 Minuten. Im Optimum werden also die Fahrer sehr ungleich behandelt. Wie kann das sein? Wenn ein Fahrer von oben nach unten wechselt, dann spart er 49 Minuten. Er zwingt aber auch 50 Fahrer 1 Minute länger zu fahren. Also steigt die Gesamtfahrzeit um 1 Minute.

Globales Optimum versus Nash Gleichgewicht



100 Fahrer wollen von Start nach Ziel.

Globales Optimum

Wenn x Fahrer unten herum fahren, dann ist die Gesamtfahrzeit

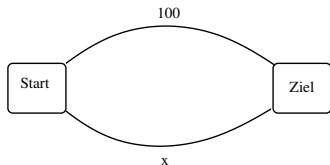
$$F = x \cdot x + (100 - x) \cdot 100 = 10000 - 100x + x^2.$$

F ist am kleinsten für $x = 50$. Dann ist die Gesamtfahrzeit 7.500.

Unten-Fahrer brauchen 50 Minuten, Oben-Fahrer brauchen 100 Minuten.

Die Oben-Fahrer werden diese Lösung nicht akzeptieren, sondern nach unten wechseln bis

Globales Optimum versus Nash Gleichgewicht



100 Fahrer wollen von Start nach Ziel.

Globales Optimum

Wenn x Fahrer unten herum fahren, dann ist die Gesamtfahrzeit

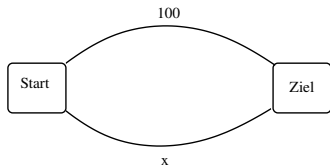
$$F = x \cdot x + (100 - x) \cdot 100 = 10000 - 100x + x^2.$$

F is am kleinsten für $x = 50$. Dann ist die Gesamtfahrzeit 7.500.

Unten-Fahrer brauchen 50 Minuten, Oben-Fahrer brauchen 100 Minuten.

Die Oben-Fahrer werden diese Lösung nicht akzeptieren, sondern nach unten wechseln bis **Fahrzeit oben und unten gleich ist.**

Globales Optimum versus Nash Gleichgewicht



100 Fahrer wollen von Start nach Ziel.

Globales Optimum: Gesamtfahrzeit 7.500.

Nash Gleichgewicht

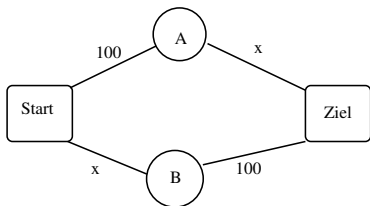
Die Fahrzeit oben und unten ist gleich, wenn 100 Fahrer unten fahren. Dann ist die Gesamtfahrzeit 10000.

Nash Gleichgewicht: Keiner kann sich verbessern, wenn er und nur er abweicht.



$$\text{Price of Anarchy} = \frac{10000}{7500} = \frac{4}{3}.$$





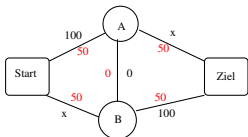
- 100 Autos wollen von Start nach Ziel. Fahrzeiten sind:
- (Start nach A) und (B nach Ziel): 100 Minuten
- (Start nach B) und (A nach Ziel): x Minuten, falls x Autos fahren

Globales Optimum

50 Autos fahren über A, 50 Autos fahren über B. Jeder hat eine Fahrzeit von 150 Minuten. Gesamtfahrzeit = 15000 Minuten.

Das ist optimal. Bei Verteilung n und $100 - n$ ist die Gesamtfahrzeit $n \cdot (100 + n) + (100 - n) \cdot (100 + 100 - n) = 15000 + 2 \cdot (n - 50)^2$.

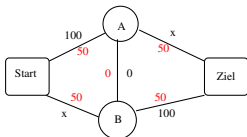
Stellt sich von selbst ein!!!! Und ist ein Nash Gleichgewicht.



Was passiert?

- Natürlich kann es nicht schlechter werden. Es gibt schließlich die alten Möglichkeiten immer noch.
- Was ist **es**?
- es = soziales Optimum: Dann stimmt die Argumentation.
- es = der Zustand, der sich einstellt, wenn jeder seinen Nutzen maximiert. Dann ist die Argumentation falsch.
- Es gibt neue Möglichkeiten. Wenn jemand diese Möglichkeiten nutzt, könnte es für andere schlechter werden.

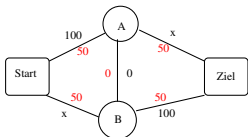
Denken Sie an die Deregulierung der Finanzmärkte und des Arbeitsmarkts.



Was passiert?

- Natürlich kann es nicht schlechter werden. Es gibt schließlich die alten Möglichkeiten immer noch.
- Was ist **es**?
- es = soziales Optimum: Dann stimmt die Argumentation.
- es = der Zustand, der sich einstellt, wenn jeder seinen Nutzen maximiert. Dann ist die Argumentation falsch.
- Es gibt neue Möglichkeiten. Wenn jemand diese Möglichkeiten nutzt, könnte es für andere schlechter werden.

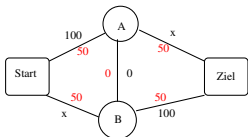
Denken Sie an die Deregulierung der Finanzmärkte und des Arbeitsmarkts.



Was passiert?

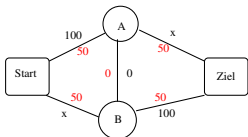
- Natürlich kann es nicht schlechter werden. Es gibt schließlich die alten Möglichkeiten immer noch.
- Was ist **es**?
- es = soziales Optimum: Dann stimmt die Argumentation.
- es = der Zustand, der sich einstellt, wenn jeder seinen Nutzen maximiert. Dann ist die Argumentation falsch.
- Es gibt neue Möglichkeiten. Wenn jemand diese Möglichkeiten nutzt, könnte es für andere schlechter werden.

Denken Sie an die Deregulierung der Finanzmärkte und des Arbeitsmarkts.



Was passiert?

- Natürlich kann es nicht schlechter werden. Es gibt schließlich die alten Möglichkeiten immer noch.
 - Was ist **es**?
 - es = soziales Optimum: Dann stimmt die Argumentation.
 - es = der Zustand, der sich einstellt, wenn jeder seinen Nutzen maximiert. Dann ist die Argumentation falsch.
 - Es gibt neue Möglichkeiten. Wenn jemand diese Möglichkeiten nutzt, könnte es für andere schlechter werden.
- Denken Sie an die Deregulierung der Finanzmärkte und des Arbeitsmarkts.

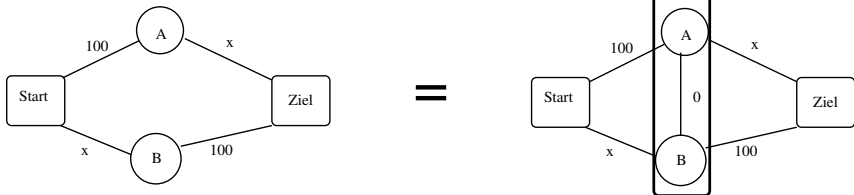


Was passiert?

- Natürlich kann es nicht schlechter werden. Es gibt schließlich die alten Möglichkeiten immer noch.
- Was ist **es**?
- es = soziales Optimum: Dann stimmt die Argumentation.
- es = der Zustand, der sich einstellt, wenn jeder seinen Nutzen maximiert. Dann ist die Argumentation falsch.
- Es gibt neue Möglichkeiten. Wenn jemand diese Möglichkeiten nutzt, könnte es für andere schlechter werden.

Denken Sie an die Deregulierung der Finanzmärkte und des Arbeitsmarkts.

Nach Bau der neuen Straße



- 100 Autos wollen von Start nach Ziel
- Durch den Bau der neuen Straße haben wir die beiden Knoten A und B effektiv zu einem Knoten AB verschmolzen. Von Start nach AB gibt es zwei Straßen: Kosten 100 und Kosten x .
- Diese Situation haben wir schon analysiert.
 - Soziales Optimum: jeweils 50 benutzen jede der Straßen. Gesamtkosten $7500 + 7500 = 15000$.
 - Nash Gleichgewicht: alle 100 benutzen die Straße mit Kosten x . Gesamtkosten $10000 + 10000 = 20000$.
- Price of Anarchy = $\frac{\text{Kosten des Nash Gleichgewichts}}{\text{Kosten im Optimum}} = \frac{20000}{15000} = \frac{4}{3}$.

Beispiele in der Realität (aus Wikipedia-Artikel über Braess Paradox)

- In Seoul a speeding-up in traffic around the city was seen when a motorway was removed as part of a restoration project.
- In Stuttgart after investments into the road network in 1969, the traffic situation did not improve until a section of newly built road was closed for traffic again.
- In 1990 the closing of 42nd street in New York City reduced the amount of congestion in the area.
- In 2012, an international team of researchers from Institut Néel (CNRS, France), INP (France), IEMN (CNRS, France) and UCL (Belgium) published a paper in PhysRev showing that adding a path for electrons in a nanoscopic network paradoxically reduced its conductance. This was shown both by theoretical simulations and experiments at low temperature using a scanning gate microscopy.



Verkehr: Lokale Optimierung führt zu einem Nashgleichgewicht

Wenn der augenblickliche Verkehrsfluss kein Nashgleichgewicht ist, dann gibt es mindestens einen Fahrer, der sich verbessern kann. Wir wählen **einen (!!!)** dieser Fahrer und er optimiert sein Verhalten (Best Response des Fahrers)

Für diesen Fahrer hat sich die Situation dadurch verbessert, für andere aber unter Umständen verschlechtert, da auf der neuen Route des Fahrers der Verkehr gewachsen ist. Es ist also keineswegs klar, dass sich jemals ein stabiler Zustand ergibt.

Theorem

*Bei Verkehrsflüssen führt wiederholte Best Response eines **einzelnen** Fahrers zu einem Nashgleichgewicht.*



Theorem

*Bei Verkehrsflüssen führt wiederholte Best Response eines **einzelnen** Fahrers zu einem Nashgleichgewicht.*

- Es gibt auch Systeme, bei denen sich kein Gleichgewicht einstellt, sondern zyklisches Verhalten.

Schweinezyklus: Preis und Produktion von Ferkeln

- Das gilt auch für Verkehrsflüsse, falls mehr als ein Fahrer seine Wahl ändern kann.
- Es ist schwierig zu entscheiden, ob sich ein Gleichgewicht automatisch einstellt. Existenz von Gleichgewichtspreisen

Theorem

Sei f ein Nashgleichgewicht und sei f^* der Verkehrsfluss geringster Gesamtkosten. Dann gilt:

$$\text{Gesamtkosten des Nash-Flusses} \leq \frac{4}{3} \cdot \text{Kosten von } f^* .$$

Braess ist Extrembeispiel.

- Bei Verkehrsflüssen weiß man also genau, mit welchen sozialen Kosten freie Einzelentscheidungen verbunden sein können.
- Es gibt Systeme, wo dieser Faktor viel größer ist.
- Falls man den Faktor $4/3$ drücken will, muss man Regeln einführen (Ampeln, Geschwindigkeitsbeschränkungen, Nutzungsgebühren), um die freien Entscheidungen zu lenken.

G. Christodoulou, KM, E. Pyrga, Improving the Price of Anarchy for Selfish Routing via Coordination Mechanisms,



- Systeme von nutzenmaximierenden Agenten: Verkehrsflüsse, Auktionen, ... auch für Informatik immer wichtiger
- Nash Gleichgewichte existieren unter sehr allgemeinen Bedingungen.
- Lösungsqualität von Gleichgewichten kann weit vom Optimum entfernt sein (Preis der Anarchie).
- Durch Ändern der Regeln kann man Gleichgewichte beeinflussen, etwa Vickrey Auktionen oder Steuerung von Verkehrsflüssen durch Ampeln, Geschwindigkeitsbeschränkungen, Nutzungsgebühren.
- Bei manchen Systemen (Verkehrsflüsse) stellen sich Gleichgewichte automatisch ein.