Induktion und Invarianten

Ideen und Konzepte der Informatik

Kurt Mehlhorn

max planck institut
informatik

Saarland
Informatics Campus

Vollständige Induktion

Vollständige Induktion (oder auch nur Induktion) ist eine wichtige Beweismethode, um Aussagen $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen n zu beweisen.

Beispiel: Für alle $n \geq 1$ gilt: 1 + 2 + . . . + n = n(n+1)/2.

Um "für alle natürlichen Zahlen n gilt: $A(n)$" zu beweisen, tut man:

- Induktionsanfang: Man beweist die Aussage für $n = 1$.
- Induktionsschritt: Für alle $n \geq 1$ zeigt man: Falls $A(n)$ gilt, dann gilt auch $A(n+1)$.
- Dabei heißt $A(n)$ die Induktionsvoraussetzung (I.V.) und $A(n+1)$ die Induktionsbehauptung (I.B.).

- Um eine Aussage für alle natürlichen Zahlen einschließlich der Null zu zeigen, beginnt man die Induktion bei Null. Den Induktionsschritt dann für $n \geq 0$.
- Den Induktionsschritt kann man auch von $n-1$ auf n machen. Das ist Geschmacksache.

Für alle $n \geq 1$ gilt: $1+2+\ldots+n = n(n+1)/2$.

Induktionsanfang: Die Aussage für $n=1$ lautet: $1 = 1 \cdot 2/2$. Das ist richtig.

Induktionsschritt:

- Die Aussage für n lautet: $1+2+\ldots+n = n(n+1)/2$.
- Die Aussage für $n+1$: $1+2+\ldots+n+(n+1) = (n+1)(n+2)/2$.
- Beweis des Induktionsschritts.

$$
\begin{aligned}
1+2+\ldots+n+(n+1) &= (1+2+\ldots+n)+(n+1) & \\
&= \frac{n(n+1)}{2}+(n+1) & \text{nach I.V.} \\
&= \left(\frac{n}{2}+1\right)(n+1) & \text{Rechnen} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2} & \text{Rechnen}
\end{aligned}
$$

Damit ist Induktionsbehauptung bewiesen.

Gibt es wirklich rote und schwarze Kugeln?

Für alle $n \geq 1$ gilt: In jeder n-elementigen Menge von Kugeln haben alle Kugeln die gleiche Farbe. Kurz: die Menge ist einfarbig.

Induktionsanfang: Die Aussage für $n = 1$ lautet: In jeder einelementigen Menge von Kugeln haben alle Kugeln die gleiche Farbe. Das ist richtig.

Induktionsschritt:

- Die Aussage für n: Jede n-elementige Menge ist einfarbig.
- Die Aussage für $n+1$: Jede $n+1$-elementige Menge ist einfarbig.
- Sei S eine $n+1$-elementige Menge von Kugeln und seien a und b zwei verschiedene Kugeln in S. Die gibt es, da $n+1 \geq 2$.

  Die Mengen $S_a = S \setminus \{ a \}$ und $S_b = S \setminus \{ b \}$ haben jeweils n Elemente. Nach I.V. ist daher sowohl S_a als auch S_b einfarbig. Auch ist $S = S_a \cup S_b$.

  Sei c eine Kugel im Durchschnitt von S_a und S_b. Da S_a und S_b einfarbig sind, haben alle Kugeln in S_a und auch alle Kugeln in S_b die gleiche Farbe wie c. Also ist S einfarbig.

Wir wissen alle, dass die Behauptung nicht stimmt. Wo ist der Fehler?

Ein Baum mit n Knoten hat genau $n-1$ Kanten

Diese Folie setzt die Einheit über Graphen voraus.

Induktionsanfang: Ein Baum mit einem Knoten hat keine Kante. Also richtig.

Induktionsschritt: Sei T ein Baum mit $n+1$ Knoten.

- Da ein Baum zusammenhängend ist, haben alle Knoten mindestens den Grad Eins.
- Da ein Baum ein Wald ist, gibt es mindestens einen Knoten vom Grad kleiner gleich Eins (siehe Einheit über Graphen).
- Also gibt es einen Knoten vom Grad Eins. Sei v ein solcher.
- Wir entfernen v aus T und erhalten einen Baum T' mit n Knoten.
- Nach I.V. hat T' genau $n-1$ Kanten.
- T hat eine Kante mehr, also genau n Kanten.

Schleifeninvarianten (Induktion in der Programmierung)

Betrachte folgendes Programm zur Berechnung von $1+2+\ldots+n$.

$s \leftarrow 0$;
for i von 1 bis n
  /* Schleifeninvariante: Es gilt $s = 1+\ldots+(i-1)$. */
  $s \leftarrow s+i$;
  /* Es gilt $s = 1+\ldots+i$. */
/* Es gilt $s = 1+\ldots+n$. */

- Wenn wir die Schleife zum ersten Mal betreten, dann ist $s=0$ und $i=1$. Also gilt $s = 1+\ldots+(i-1)$ (rechts steht die leere Summe).
- Nehmen wir nun, dass i beliebig ist und dass $s = 1+\ldots+(i-1)$ vor Ausführung des Rumpfes der Schleife gilt.
- Im Rumpf ersetzen wir den Wert von s durch $s+i$. Also gilt nach Ausführung des Rumpfes $s = 1+\ldots+i$.
- Wenn $i < n$, dann erhöhen wir i und gehen wieder in den Rumpf. Also gilt die Schleifeninvariante wieder vor Ausführung des Rumpfes.
- Wenn $i = n$, dann verlassen wir die Schleife und haben $i = n$ und $s = 1+\ldots+i$. Also $s = 1+\ldots+n$.