Graphen

Ideen und Konzepte der Informatik

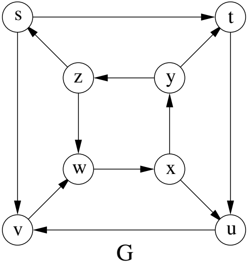
Kurt Mehlhorn

max planck institut
informatik

SIC Saarland Informatics Campus

Einheit beruht auf Abschnitt 2.12 in Sanders/M/Dietzfelbinger/Dementiev

Gerichtete Graphen



Ein gerichteter Graph (digraph) $G = (V, E)$ ist ein Paar, bestehend aus einer Knotenmenge V und einer Kantenmenge $E \subseteq V \times V$.

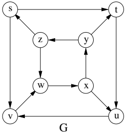
Der Graph G aus der Abbildung

- $V = \{ s, t, u, v, w, x, y, z \}$
- $E = \{ (s,t), (t,u), (u,v), (v,w), (w,x), (x,y), (y,z), (z,s) \} \cup \{ (s,v), (z,w), (y,t), (x,u) \}$

Immer: $n = |V|$ und $m = |E|$.

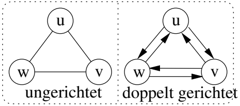
Gerichtete Graphen, Begriffe

- Kante $e = (u, v) \in E$ stellt eine Verbindung von u nach v dar; u = Startknoten und v = Zielknoten von e.
- e ist inzident mit u und v, u und v liegen auf e, u und v sind adjazent oder benachbart.
- u ist ein (unmittelbarer) Vorgänger von v und v ist ein (unmittelbarer) Nachfolger von u.
- Der Spezialfall (v, v) heißt Selbstschleife.
- Der Ausgangsgrad eines Knotens v ist die Zahl der Kanten, die von v ausgehen, analog Eingangsgrad.
  $outdeg(v) = |\{u \in V \mid (v, u) \in E\}|$ und $indeg(v) = |\{u \in V \mid (u, v) \in E\}|$.



Knoten w hat Eingangsgrad 2 und Ausgangsgrad 1.

Ungerichteter Graph, doppelt gerichterer Graph

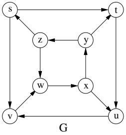


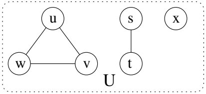
- doppelt gerichteter Graph: Für jede gerichtete Kante (u, v) gibt es auch die Gegenkante (v, u).
- ungerichteter Graph (Ugraph): fasse das Kantenpaar (u, v), (v, u) als die Paarmenge $\{u, v\}$ auf.

- Ein ungerichteter Graph hat nur halb so viele Kanten wie sein doppelt gerichtetes Gegenstück.
- Wenn $\{u, v\}$ eine Kante ist, heißt u auch ein Nachbar von v.
- in doppelt gerichtetem Graph: Eingangsgrad = Ausgangsgrad
- in Ugraph: Grad = Anzahl der inzidenten Kanten.
- Analogie zu Straßengraphen:
  - gerichtete Kante = Einbahnstraße
  - ungerichtete Kante = in beiden Richtungen befahrbar.
  - Kante und Umkehrkante = Spur und Gegenspur

Kantengewichte, Pfade und Wege

- Kantengewichte oder Kantenkosten: $c\colon E \to \mathbb{R}$ ordnet jeder Kante eine Zahl zu. Statt c oft auch w, *Zeit*.
- in Ugraph kann eine Kante $\{u,v\}$ nur ein Gewicht haben kann, in doppelt gerichtetem Graph kann $c((u,v)) \neq c((v,u))$ sein.
- Ein Weg oder Pfad $p = (v_0,\dots,v_k)$ im Digraph ist eine durch Kanten verbundene Folge von Knoten, d. h., $(v_0,v_1) \in E$, $(v_1,v_2) \in E$, $\dots$, $(v_{k-1},v_k) \in E$; $k \geq 0$ heißt die Länge von p. Auch Weg = Folge seiner Kanten.
- Weg $p = (v_0,\dots,v_k)$ in einem Ugraph $\Leftrightarrow$ p Weg im doppelt gerichteten Graphen **und** $v_{i-1} \neq v_{i+1}$ für $1 \leq i < k$, also nicht $\dots,u,v,u,\dots$.
- Ein Weg $(v_0,\dots,v_k)$ heißt einfach wenn seine Knoten, außer eventuell v_0 und v_k, paarweise verschieden sind.
- Beh: Wenn es einen Weg von u nach v gibt, dann gibt es auch einen einfachen Weg von u nach v.





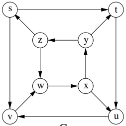
In G ist $(u,v,w) = ((u,v),(v,w))$ ein Weg der Länge 2.

In U ist (u,w,v,u,w,v) ein Weg der Länge 5. Nicht einfach

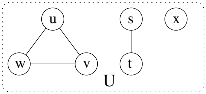
In G ist (z,w,x,u,v,w,x,y) ein nicht einfacher Weg.

Kreise und Zyklen

- Kreise (oder Zyklen) sind Wege der Länge mindestens 1, bei denen der erste und der letzte Knoten zusammenfallen.
- In ungerichteten Graphen müssen ferner die erste und die letzte Kante des Weges verschieden sein; Kreise haben daher Länge mindestens 3.
- Ein einfacher Kreis ist ein einfacher Weg, der ein Kreis ist.
- Beh: Wenn G einen Kreis hat, dann auch einen einfachen Kreis.
- Ein einfacher Kreis, der alle Knoten eines Graphen besucht, heißt Hamiltonkreis.



G



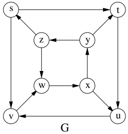
in G ist $(u, v, w, x, y, z, w, x, u)$ ein Kreis

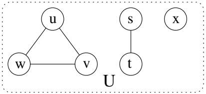
in U ist (u, w, v, u, w, v, u) ein Kreis.

$(s, t, u, v, w, x, y, z, s)$ in G und (w, u, v, w) in U sind Hamiltonkreise.

Zusammenhang, starker Zusammenhang, azyklischer Graph

- Ein Digraph heißt stark zusammenhängend, wenn es von jedem Knoten einen Weg zu jedem anderen Knoten gibt.
- Ein Digraph ohne Kreise heißt azyklisch oder kreisfrei.
- Beh: In einem azyklischen Graphen gibt es einen Knoten mit Eingangsgrad Null.
- Ein Ugraph heißt zusammenhängend, wenn es von jedem Knoten aus einen (ungerichteten) Weg zu jedem anderen Knoten gibt.
- Ein Ugraph ohne Kreise heißt Wald. Ein zusammenhängender Wald heißt Baum.
- Beh: In einem Wald gibt es mindestens einen Knoten vom Grad ≤ 1. Ein Baum mit n Knoten hat genau $n-1$ Kanten.





G is stark zusammenhängend.

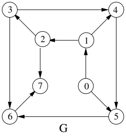
G ohne die Kante (w,x) ist azyklisch.

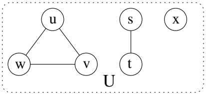
U ist nicht zusammenhängend.

Der Untergraph, der durch die Knoten s, t und x aufgespannt wird, ist ein Wald.

Zusammenhang, starker Zusammenhang, azyklischer Graph

- Ein Digraph heißt stark zusammenhängend, wenn es von jedem Knoten einen Weg zu jedem anderen Knoten gibt.
- Ein Digraph ohne Kreise heißt azyklisch oder kreisfrei.
- Beh: In einem azyklischen Graphen gibt es einen Knoten mit Eingangsgrad Null.
- Ein Ugraph heißt zusammenhängend, wenn es von jedem Knoten aus einen (ungerichteten) Weg zu jedem anderen Knoten gibt.
- Ein Ugraph ohne Kreise heißt Wald. Ein zusammenhängender Wald heißt Baum.
- Beh: In einem Wald gibt es mindestens einen Knoten vom Grad ≤ 1. Ein Baum mit n Knoten hat genau $n-1$ Kanten.





G is stark zusammenhängend.

G ohne die Kante (w,x) ist azyklisch.

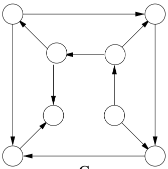
U ist nicht zusammenhängend.

Der Untergraph, der durch die Knoten s, t und x aufgespannt wird, ist ein Wald.

Alg zum Testen, ob ein Digraph azyklisch ist

In einem azyklischen Graphen gibt es einen Knoten mit Eingangsgrad Null.

zaehler $\leftarrow$ 0;
while *G* hat noch einen Knoten
  bestimme einen Knoten *v* mit Eingangsgrad 0;
  num[*v*] $\leftarrow$ *zaehler*; erhöhe *zaehler* um 1;
  entferne *v* aus *G*;
if alle Knoten entfernt
  G is azyklisch
else
  G enthält einen Kreis



num hat die Eigenschaft, dass alle Kanten von kleinerer zu größerer Nummer gehen (topologische Sortierung).
Beweis: Wenn (u, v) eine Kante ist, dann wird *u* vor *v* nummeriert.