Polynome, Extrema, Nullstellen, Interpolation

Ideen und Konzepte der Informatik

Kurt Mehlhorn

max planck institut informatik

SIC Saarland Informatics Campus

Polynome

- Sei k eine natürliche Zahl. Die Funktion $x \to x^k$ heißt k-te Potenz.
- Eine Summe von Potenzen mit Vorfaktoren (Koeffizienten) heißt Polynomfunktion oder einfacher Polynom. Die höchste vorkommende Potenz ist der Grad des Polynoms.
  - $2x^2 - 4x + 7$, Polynom vom Grad 2, eine quadratische Funktion
  - $x - 3$ ein Polynom vom Grad 1, eine lineare Funktion
  - $x^3 + 4x$ ist ein Polynom vom Grad 3.
  - $a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 = \sum_{0 \le i \le k} a_i x^i$ ist ein Polynom vom Grad k. Die Koeffizienten a_i sind dabei feste Zahlen.
- Für große x ist der Wert eines Polynoms im wesentlichen der Wert der höchsten Potenz, etwa:

  Sei $x = 10^6$. Dann $2x^2 - 4x + 7 = 2 \cdot 10^{12} - 4 \cdot 10^6 + 7 \approx 2 \cdot 10^{12}$.

  Allgemein,

$$a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 = x^k \left(a_k + \left(\frac{a_{k-1}}{x} + \ldots + \frac{a_0}{x^k} \right) \right)$$

  Der Ausdruck in der inneren Klammer ist vernachlässigbar für große x. Genauer, er geht gegen 0 für $x \to \infty$.

Wachstumsraten von Polynomen

- Wenn man das Argument einer k-ten Potenz verdoppelt, dann multipliziert sich der Wert mit dem Faktor 2^k, da (siehe Potenzen und Logarithmen)

$$(2x)^k = 2^k \cdot x^k.$$

- Das stimmt auch für jede Polynomfunktion vom Grad k, wenn das Argument nur hinreichend groß ist.

  Begründung: Der Wert des Polynoms wird (im Wesentlichen) durch die höchste Potenz bestimmt und deren Wert multipliziert sich mit dem Faktor 2^k.

- Also Polynom vom

Grad 1	Wert verdoppelt sich
Grad 2	Wert wird mit 4 multipliziert
Grad 3	Wert wird mit 8 multipliziert.

Ableitungen und Extrema

- Die Ableitung der Funktion $x \to x^k$ ist $k \cdot x^{k-1}$, z.B. $f(x) = x^2$, dann $f'(x) = 2x$ und $f(x) = 3x^2$ dann $f'(x) = 3 \cdot 2x = 6x$.
- Ein Polynom leitet man ab, indem man die einzelnen Terme ableitet, z.B., $f(x) = 4x^2 - 8x + 24$, dann $f'(x) = 8x - 8$.
- Maxima und Minima von quadratischen Funktionen: Man bestimmt die Nullstelle der Ableitung. An dieser Stelle hat die Funktion ein Minimum, wenn der Koeffizient von x^2 positiv ist, ein Maximum, wenn der Koeffizient von x^2 negativ ist.

  Beispiel: Sei $p(x) = 4x^2 - 8x + 24$. Dann $p'(x) = 8x - 8$. Wir lösen $p'(x) = 8x - 8 = 0$ und erhalten $x = 1$. Der Koeffizient von x^2 ist 4 und 4 ist positiv. Also haben wir an der Stelle $x = 1$ ein Minimum.
- Vorsicht: Für Polynome von höherem Grad ist die Sache komplizierter, aber das werden wir nie brauchen. Man berechnet die erste und zweite Ableitung $p'(x)$ und $p''(x)$ und bestimmt dann die Nullstellen der ersten Ableitung. Sei x eine Nullstelle der ersten Ableitung, d.h. $p'(x) = 0$. Dann
  $p''(x) > 0 \Rightarrow$ Minimum, $p''(x) < 0 \Rightarrow$ Maximum, $p''(x) = 0 \Rightarrow$ man muss genauer hinschauen.

Nullstellen von Polynomen

- Ein lineares Polynom $ax + b$ hat genau eine Nullstelle, nämlich $x = -b/a$.
- Beispiel: $4x - 8$ hat die Nullstelle $x = 2$.
- Ein quadratisches Polynom $ax^2 + bx + c$ hat genau zwei Nullstellen, nämlich $x_{1,2} = \frac{1}{2a}(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})$.
  - $x^2 + 2x$ hat die Nullstellen $x_{1,2} = \frac{1}{2}(-2 \pm \sqrt{4}) = \frac{1}{2}(-2 \pm 2)$, also $x_1 = 0$ und $x_2 = -2$.
  - $x^2 - 2x + 1$ hat die Nullstellen $x_{1,2} = \frac{1}{2}(2 \pm \sqrt{4 - 4}) = 1$, also $x_1 = x_2 = 1$. Das ist eine doppelte Nullstelle.
  - $x^2 - 2x + 2$ hat die Nullstellen $x_{1,2} = \frac{1}{2}(2 \pm \sqrt{4 - 8}) = \frac{1}{2}(2 \pm \sqrt{-4})$. Das sind zwei komplexe Nullstellen. Wird im Kurs nie vorkommen!!!.
- Ein Polynom vom Grad k hat genau k Nullstellen. Einige dieser Nullstellen sind komplex. Das Nullpolynom (alle Koeffizienten sind null) hat unendlich viele Nullstellen. Das einzige Polynom vom Grad $\leq k$ mit mehr als k Nullstellen ist das Nullpolynom.

Interpolationspolynom

- Interpolationspolynom: Seien $x_1, \ldots, x_{k+1}$ paarweise verschiedene reelle Zahlen und seien $y_1, \ldots y_{k+1}$ beliebige reelle Werte. Dann gibt es genau ein Polynom p vom Grad $\le k$ mit $p(x_i) = y_i$ für $1 \le i \le k+1$.
- Höchstens Eines: Seien p und q zwei Polynome vom Grad $\le k$ mit $p(x_i) = y_i = q(x_i)$ für $1 \le i \le k+1$. Betrachte das Polynom $r(x) = p(x) - q(x)$. Es hat einen Grad $\le k$ und es gilt $r(x_i) = 0$ for $1 \le i \le k+1$, d.h., r hat Grad $\le k$ und mehr als k Nullstellen. Also ist r das Nullpolynom und daher $p = q$.
- Mindestens Eines: Betrachte

$$g_i(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_{k+1})}{(x_i - x_1)(x_i - x_2)\cdots(x_i - x_{k+1})} = \frac{\text{oben fehlt } x - x_i}{\text{unten fehlt } x_i - x_i}.$$

Es gilt $g_i(x_i) = 1$ und $g_i(x_j) = 0$ für $j \neq i$ und g_i hat Grad k.

$$p(x) = y_1 \cdot g_1(x) + y_2 \cdot g_2(x) + \ldots + y_{k+1} \cdot g_{k+1}(x)$$

ist das gesuchte Interpolationspolynom.