Lineare Gleichungssysteme

Ideen und Konzepte der Informatik

Kurt Mehlhorn

max planck institut informatik

SIC Saarland Informatics Campus

Lineare Gleichungssysteme

- Eine lineare Funktion ist eine Summe von Variablen mit Vorfaktoren (Koeffizienten), etwa

$$5x + 3y - 2z.$$

- Eine lineare Gleichung hat die Form “lineare Funktion $= 0$”, etwa

$$5x + 3y - 2z - 5 = 0.$$

  Auflösung nach einer Variablen: bringe die anderen Variablen und das konstante Glied auf die andere Seite und teile durch den Vorfaktor der Variablen. Also,

$$5x = -3y + 2z + 5 \quad \text{und dann} \quad x = (-3y + 2z + 5)/5.$$

- Ein lineares Gleichungssystem ist eine Menge von linearen Gleichungen, etwa

$$5x + 3y = 7$$
$$9x - 4y = 9$$

Lösungen von linearen Gleichungssystemen

- Ein Tupel von Werten, je einen für jede im Gleichungssystem vorkommende Variable, das alle Gleichungen erfüllt, nennt man Lösung, etwa $x = 1$ und $y = 3$ ist eine Lösung von $x + y = 4$ und $4x - y = 1$, denn $1 + 3 = 4$ und $4 \cdot 1 - 3 = 1$.
- Ein lineares Gleichungssystem hat entweder keine Lösung, oder genau eine Lösung, oder unendlich viele Lösungen.
  - $x + y = 1$ und $x + y = 2$ hat keine Lösung.
  - Das Gleichungssystem im ersten Unterpunkt hat genau eine Lösung, nämlich $(1, 3)$.
  - Das Gleichungssytem $x + y = 1$ hat unendlich viele Lösungen, nämlich alle Punkte $(x, 1 - x)$ für beliebiges x.
  - Die Gleichungssysteme, die in dieser Kursreihe vorkommen, haben in der Regel eine eindeutige Lösung.
- Man kann die Lösungen mit Hilfe des Algorithmus von Gauss bestimmen.

Lösung von Gleichungssystemen (Gauss)

- Vorgehensweise: Wir elimieren Variable für Variable bis wir eine Gleichung in einer Variablen bekommen. Die lösen wir und setzen dann rückwärts ein.
- Betrachte

$$\begin{aligned} x+y+z &= 3 \\ 4x-y+2z &= 5 \\ 7x+y-4z &= 4. \end{aligned}$$

Wir lösen die erste Gleichung nach z auf und erhalten $z=3-x-y$. Wir setzen diesen Ausdruck in die beiden anderen Gleichungen ein und erhalten zwei Gleichungen in zwei Unbekannten.

$$\begin{aligned} 4x-y+2(3-x-y) &= 5 \quad \text{und nach Vereinfachen} \quad 2x-3y &= -1 \\ 7x+y-4(3-x-y) &= 4 \quad \text{und nach Vereinfachen} \quad 11x+5y &= 16. \end{aligned}$$

Wir lösen die erste Gleichung nach y auf und erhalten $y=(-2x-1)/(-3)$ oder schöner $y=(2x+1)/3$. Wir setzen in die letzte Gleichung ein und erhalten $11x+5(2x+1)/3=16$ oder nach Ausmultiplizieren $33x+10x+5=48$ und schließlich $x=1$.
Nun gehen wir rückwärts und setzen zunächst in den Ausdruck für y ein und erhalten $y=(2x+1)/3=(2\cdot 1+1)/3=1$ und weiter in den Ausdruck für z und erhalten $z=3-x-y=3-1-1=1$.

Unlösbarkeit

Betrachte

$$x + y = 1$$
$$x + y = 2$$

Wir lösen die erste Gleichung nach y auf und erhalten $y = 1 - x$. Einsetzen in die zweite Gleichung liefert

$$x + (1 - x) = 2 \quad \text{und nach Vereinfachen} \quad 1 = 2.$$

Die Gleichung $1 = 2$ ist nicht erüllbar und daher hat das System keine Lösung

Falls das System keine Lösung hat, kommt man immer irgendwann auf eine Gleichung zwischen Zahlen, die offensichtlich nicht erfüllbar ist.

Unendlich viele Lösungen

Betrachte

$$\begin{aligned} x+y+z &= 3 \\ 2x+2y+z &= 5 \\ 4x+4y+2z &= 10. \end{aligned}$$

Auflösen der ersten Gleichung nach z ergibt $z = 3 - x - y$. Einsetzen in die anderen beiden Gleichungen ergibt.

$$\begin{aligned} 2x+2y+(3-x-y) &= 5 \qquad \text{und nach Vereinfachen} \quad x+y &&= 2 \\ 4x+4y+2(3-x-y) &= 10 \qquad \text{und nach Vereinfachen} \quad 2x+2y &&= 4 \end{aligned}$$

Auflösen der ersten Gleichung nach y ergibt $y = 2 - x$. Einsetzen in die andere Gleichung ergibt

$$2x + 2(2-x) = 4 \quad \text{und nach Vereinfachen} \quad 0x = 0.$$

Diese Gleichung ist für jeden Wert von x erfüllt. Daher dürfen wir den Wert von x beliebig wählen und erhalten dann $y = 2 - x$ und
$z = 3 - x - y = 3 - x - (2 - x) = 3 - x - 2 + x = 1$.

Allgemein, werden wir irgendwann auf eine Gleichung $0x + 0y + \ldots = 0$ kommen und dann dürfen wir die Werte der Variablen x, y, $\ldots$ frei wählen.