**Universität des Saarlandes**
**Fachrichtung Mathematik**
Dr. Christian Steinhart
Friedrich Günther

**Übungen zur Vorlesung „Höhere Mathematik für Ingenieure IV B"**
Sommersemester 2025

**Blatt 2**
Abgabe bis Freitag, 2. Mai 2025, 20 Uhr

---

**Aufgabe 1 (4+1+5=10 Punkte):** Sei $f = u + \mathrm{i}v\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, die aufgefasst als Funktion von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ zweimal stetig partiell differenzierbar ist.[1]

(i) Zeigen Sie, dass $u\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Laplacegleichung ist, d. h. $\Delta u = \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0$.

(ii) Ist auch $v$ eine Lösung der Laplacegleichung?

Sei nun $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$.

(iii) Gibt es eine holomorphe Funktion $g$, deren Realteil $u$ ist? Falls ja, geben Sie eine solche Funktion $g$ an!

**Hinweis:** Versuchen Sie einen passenden Imaginärteil zu bestimmen.

**Aufgabe 2 (3+1+3+3=10 Punkte):** Bestimmen Sie mithilfe der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen alle Punkte $z = x + \mathrm{i}y$ in $\mathbb{C}$, in denen die gegebenen Funktionen komplex differenzierbar sind:

(i) $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto |z|^2$.

(ii) $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \overline{z}$.

(iii) $h\colon \mathbb{C} - \{0\} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto 1/z$.

(iv) $j\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \sin|z|$.

---

[1] Es handelt sich hierbei um keine Einschränkung, aber das ist nicht leicht zu zeigen.

**Aufgabe 3 (4+1+3+2=10 Zusatzpunkte):** Es bezeichne

$$\iota\colon \mathbb{C} \longrightarrow M(2,\mathbb{R}), \qquad x + \mathrm{i}y \longmapsto \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}.$$

(i) Zeigen Sie, dass $\iota$ ein Homomorphismus von $\mathbb{R}$-Algebren ist, d. h. zeigen Sie, dass

$$\iota(z_1 + z_2) = \iota(z_1) + \iota(z_2), \qquad \iota(z_1 z_2) = \iota(z_1)\iota(z_2), \qquad \iota(rz) = r\iota(z),$$

wobei $z_1, z_2$ in $\mathbb{C}$ und $r$ in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie weiter, dass $\iota$ injektiv ist.

**Hinweis:** Das bedeutet, dass es einen Körper in $M(2,\mathbb{R})$ gibt, der vermöge $\iota$ mit $\mathbb{C}$ identifiziert wird.

(ii) Zeigen Sie, dass es für eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $L\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl $\alpha$ gibt, sodass $L$ Multiplikation mit $\alpha$ ist, d. h. $L = \mu_\alpha\colon z \mapsto \alpha z$.

(iii) Es bezeichne $\Lambda\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$, $z = x + \mathrm{i}y \mapsto (x, y)$. Finden Sie zu $\mathbb{R}$-linearem $T\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, d. h. $T(x + \mathrm{i}y) = xT(1) + yT(\mathrm{i})$ für $x + \mathrm{i}y$ in $\mathbb{C}$, diejenige Matrix $A$, die das folgende Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\Lambda"'] & \mathbb{C} \arrow[d, "\Lambda"] \\ \mathbb{R}^2 \arrow[r, "\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}"'] & \mathbb{R}^2 \end{tikzcd}$$

Zeigen Sie: Genau dann ist $T$ sogar $\mathbb{C}$-linear, wenn $A$ zu $\operatorname{im}(\iota) \subseteq M(2,\mathbb{R})$ gehört.

(iv) Zeigen Sie: Genau dann ist $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar im Punkt $p$ in $\mathbb{C}$, wenn die reelle Jacobimatrix $Jf(p)$ im Bild von $\iota$ liegt. Was ist die komplexe Zahl $\alpha$, die zur Ableitung von $f$ in $p$ gehört?

Hierbei wird $f$ identifiziert mit der Funktion $\Lambda \circ f \circ \Lambda^{-1}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Per Missbrauch von Notation nennt man $\Lambda \circ f \circ \Lambda^{-1}$ ebenfalls $f$.

Man schreibt wie üblich $\mathrm{pr}_i\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \mapsto x_i$, $i = 1, 2$, für die Koordinatenprojektionen bezüglich der kanonischen Basis in $\mathbb{R}^2$, und man schreibt $f_i = \mathrm{pr}_i \circ f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Dann ist

$$Jf(p) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(p) & \partial_2 f_1(p) \\ \partial_1 f_2(p) & \partial_2 f_2(p) \end{pmatrix}.$$

In klassischer Literatur zu Funktionentheorie schreibt man $u = f_1$, $v = f_2$.