

Übungen zur Vorlesung „Höhere Mathematik für Ingenieure IV B“
Sommersemester 2025

Blatt 12

Abgabe bis Freitag, 11. Juli 2025, 20 Uhr

Aufgabe 1 (2+2+2=6 Punkte):

- (i) Gibt es nichtkonstantes holomorphes $f: B(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(\frac{1}{n}) = 0$?
- (ii) Gibt es nichtkonstantes holomorphes $g: B(1, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ mit $g(\frac{1}{n}) = 0$?
- (iii) Gibt es ein nichtkonstantes holomorphes $h: B(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$, sodass für jede natürliche Zahl n gilt: $h(\frac{1}{2n}) = \frac{1}{n}$, $h(\frac{1}{2n+1}) = \frac{1}{n+1}$?

Aufgabe 2 (4 Punkte): Seien $r > 0$ und $f: B(0, r) \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, sodass $f|_{(-r, r)}$ nur reelle Werte annimmt. Zeigen Sie, dass die Koeffizienten $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in der Potenzreihenentwicklung von f um 0 allesamt reell sind, und dass $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ für alle z in $B(0, r)$ gilt.

Hinweis: Betrachten Sie $g: B(0, r) \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \overline{f(\bar{z})}$. Zeigen Sie (oder verwenden Sie), dass g holomorph ist. Verwenden Sie geschickt den Identitätssatz.

Aufgabe 3 (5+5=10 Punkte):

- (i) Ermitteln Sie mithilfe des Satzes von Rouché die Anzahl der Nullstellen von $z^4 + 12z^2 + 15z + 1$ im Annulus $A(0, 1, 2) = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$.
- (ii) Seien $r > 0$ und c eine komplexe Zahl derart, dass $|c| > \exp(r)/r$. Zeigen Sie, dass die Gleichung $\exp(z) = cz$ auf $B(0, r)$ genau eine Lösung besitzt.