

Übungen zur Vorlesung „Höhere Mathematik für Ingenieure IV B“
Sommersemester 2025

Blatt 11

Abgabe bis Freitag, 4. Juli 2025, 20 Uhr

Eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt absolut integrierbar, falls $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$ endlich ist. Für eine absolut integrierbare Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt die Funktion $\mathcal{F}[f]: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, die durch

$$\mathcal{F}[f](x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-ixt) dt$$

erklärt ist, die *Fouriertransformierte* von f .¹

Aufgabe 1 (10 Punkte): Seien $P = \{p_1, \dots, p_n\} \subseteq \mathbb{C} - \mathbb{R}$ eine endliche Menge, $f: \mathbb{C} - P \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit isolierten Singularitäten in den Punkten von P und es gelte $\lim_{|z| \rightarrow \infty} z f(z) = 0$. Dann gilt

$$\mathcal{F}[f](x) = \begin{cases} -2\pi i \sum_{p \in P, \operatorname{Im}(p) < 0} \operatorname{res}_p(f \exp(-ix)), & \text{falls } x \geq 0, \\ 2\pi i \sum_{p \in P, \operatorname{Im}(p) > 0} \operatorname{res}_p(f \exp(-ix)), & \text{falls } x \leq 0. \end{cases}$$

Hinweis: Erinnern Sie sich an die Standardabschätzung für Kurvenintegrale. Betrachten Sie für gegebenes x in $(-\infty, 0]$ respektive x in $[0, \infty)$ einen Halbkreis in der oberen respektive unteren Halbebene und führen Sie eine Grenzwertbetrachtung für den Radius durch. Welchen Teilweg kontrolliert die Forderung an das Wachstumsverhalten von f ?

¹Für Anwendungen ist diese Definition der Fouriertransformierten deutlich zu restriktiv, aber eine distributionelle Definition übersteigt die Mittel, die in dieser Vorlesung zur Verfügung stehen, deutlich.

Aufgabe 2 (5 Bonuspunkte): Zeigen Sie, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Hinweis: Betrachten Sie $f: z \mapsto \frac{1}{z^4+1}$ und begründen Sie, dass $F|_{\mathbb{R}}$ die Voraussetzungen von Aufgabe 1 erfüllt. Was hat $\mathcal{F}[f](0)$ mit dem Integral aus der Aufgabenstellung zu tun?

Aufgabe 3 (10 Punkte): Sei $a > 1$ eine reelle Zahl. Zeigen Sie, dass

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{a + \cos(\theta)} d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$