Universität des Saarlandes
Fachrichtung Mathematik
Dr. Christian Steinhart
Friedrich Günther

Übungen zur Vorlesung „Höhere Mathematik für Ingenieure IV B"
Sommersemester 2025

Blatt 1
Abgabe bis Freitag, 25. April 2025, 20 Uhr

Aufgabe 1 (2+3+1+4=10 Punkte): Sie haben in der Vorlesung die Eulersche Formel $\exp(\mathrm{i}x) = \cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)$, x in $\mathbb{R}$, und die zugehörige Formel von de Moivre $(\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x))^n = \cos(nx) + \mathrm{i}\sin(nx)$, x in $\mathbb{R}$, n in $\mathbb{N}$, kennen gelernt.

(i) Bestimmen Sie die beiden Nullstellen von $f = z^2 - 4z + 5$.

(ii) Bestimmen Sie die drei komplexen dritten Wurzeln von $w = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$, d. h. bestimmen Sie die komplexen Zahlen z_1, z_2, z_3 mit $z_j^3 = w$.

(iii) Zeigen Sie, dass $\exp(-\mathrm{i}x) = \overline{\exp(\mathrm{i}x)}$ für x aus $\mathbb{R}$ gilt.

(iv) Zeigen Sie mithilfe der Eulerschen Formel die Additionstheoreme

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

für x, y aus $\mathbb{R}$.

Aufgabe 2 (2+2+2+4=10 Punkte): Durch

$$\sinh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad \cosh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

werden die Hyperbelfunktionen *Sinus hyperbolicus* und *Cosinus hyperbolicus* auf den komplexen Zahlen erklärt.

(i) Zeigen Sie für eine der beiden Potenzreihen, dass sie für jede komplexe Zahl z absolut konvergiert.

(ii) Zeigen Sie für z in $\mathbb{C}$, dass

$$\cosh(z) = \frac{1}{2}\Big(\exp(z) + \exp(-z)\Big), \qquad \sinh(z) = \frac{1}{2}\Big(\exp(z) - \exp(-z)\Big).$$

(iii) Zeigen Sie, dass $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$ für z in $\mathbb{C}$ gilt.

(iv) Zeigen Sie für $z = x + \mathrm{i}y$, dass

$$\begin{aligned} \sin(x + \mathrm{i}y) &= \sin x \cosh y + \mathrm{i} \cos x \sinh y, \\ \cos(x + \mathrm{i}y) &= \cos x \cosh y - \mathrm{i} \sin x \sinh y. \end{aligned}$$