Universität des Saarlandes
Fachrichtung Mathematik
Dr. Christian Steinhart
Friedrich Günther

Übungen zur Vorlesung „Höhere Mathematik für Ingenieure IV B“
Sommersemester 2025

Blatt 8
Abgabe bis Freitag, 13. Juni 2025, 20 Uhr

Aufgabe 1 (3+3+3=9 Punkte): Bestimmen Sie die Laurentreihenentwicklung von f

$$f\colon \mathbb{C} - \{\pm\mathrm{i}\} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad z \longmapsto \frac{1}{1+z^2}$$

(i) …im Annulus $A_{1,\infty}(0)$,

(ii) …im Annulus $A_{0,2}(\mathrm{i})$,

(iii) …im Annulus $A_{2,\infty}(\mathrm{i})$.

Aufgabe 2 (3 Punkte): Geben Sie für f aus Aufgabe 1 und den Punkt $1+\mathrm{i}$ den bezüglich Inklusion größten Annulus an, der die Kreislinie $\partial B(1+\mathrm{i},2)$ enthält, auf dem f eine Laurentzerlegung besitzt.

Aufgabe 3 (4+4=8 Punkte): Bestimmen Sie die Laurentreihenentwicklung von

$$g\colon \mathbb{C} - \{1,2\} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad z \longmapsto \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

auf $A_{1,2}(0)$ via

(i) …Tricks mit der geometrischen Reihe,

(ii) …die explizite Formel für die Koeffizienten der Laurentreihe, d. h. via

$$a_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{g(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\, d\zeta\,. \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass die typische Parametrisierung der Kreislinie $\partial B(0,r)$ in $\mathbb{C} - \{0,1\}$ homotop zu einem geeignet gebildeten Summenweg bestehend aus Parametrisierungen der Kreislinien $\partial B(0,\frac{1}{4})$, $\partial B(1,\frac{1}{4})$ und der Verbindungsstrecke $[[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]] = \{\frac{1}{4}(1-t) + t\frac{3}{4} \mid t \in [0,1]\}$ ist.