

Übungen zur Vorlesung „Höhere Mathematik für Ingenieure IV A“
Sommersemester 2025

Blatt 13

Abgabe bis Dienstag, 8. Juli 2025, 20 Uhr

Aufgabe 1 (3+4+3=10 Punkte): Seien $r > 0$, $F: [-r, r] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die durch $(x, y) \mapsto xy$ definierte Funktion und es sei

$$y'(x) = F(x, y(x)) = xy(x) \quad \text{mit} \quad y(0) = 1$$

ein zugehöriges Anfangswertproblem.

- (i) Zeigen Sie mithilfe des Satzes von Picard-Lindelöf, dass das Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung hat.
- (ii) Berechnen Sie die ersten vier Schritte der Picarditeration.
- (iii) Geben Sie die exakte Lösung des Anfangswertproblems an.

Aufgabe 2 (2+3+5=10 Punkte): Im Ursprung der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ sei eine Punktmasse M platziert. Diese erzeugt das Gravitationsfeld

$$\mathbf{G}: \mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{r} \longmapsto -\frac{GM}{\|\mathbf{r}\|^2} \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|},$$

welches am Ort $\mathbf{r}$ in $\mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\}$ auf eine Punktmasse m die Gravitationskraft $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = m\mathbf{G}(\mathbf{r})$ ausübt. Hierbei bezeichnet G die Gravitationskonstante.

- (i) Eine Punktmasse m bewege sich auf der Trajektorie $\gamma: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\}$ durch das von M erzeugte Gravitationsfeld. Die Bewegungsgleichung lautet $\mathbf{F}(\gamma(t)) = m\gamma''(t)$ per zweitem Newtonschen Gesetz.

Formulieren Sie das entsprechende Anfangswertproblem mit den Startwerten $\gamma(0) = (x(0), y(0))^t = \mathbf{r}_0$ und $\gamma'(0) = (x'(0), y'(0))^t = \mathbf{v}_0$.

- (ii) Überführen Sie das Problem in ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung.

Hinweis: Zeigen Sie, dass das Problem vom Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ -\frac{GM}{\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}^3}x(t) \\ -\frac{GM}{\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}^3}y(t) \end{pmatrix}$$

beschrieben wird.

- (iii) Wenden Sie das explizite Eulerverfahren mit den Schrittweiten $h = 1$, $h = 0.1$ und $h = 0.0001$ auf das Anfangswertproblem mit den Startwerten $\mathbf{r}_0 = (3, 3)^t$, $\mathbf{v}_0 = (1, -1)^t$, $G = 1$, $M = 100$ und $m = 1$ auf dem Zeitintervall $[0, 30]$ an. Plotten Sie die Ergebnisse. Was fällt Ihnen auf?

Hinweis: Wir erwarten als Trajektorie einen Kegelschnitt. Die explizite analytische Lösung dieses Anfangswertproblems ist nicht ganz trivial.