

Übungen zur Vorlesung „Höhere Mathematik für Ingenieure IV A“
Sommersemester 2025

Blatt 12

Abgabe bis Dienstag, 1. Juli 2025, 20 Uhr

Aufgabe 1 (2+6=8 Punkte): Seien I ein nichtleeres abgeschlossenes Intervall, $C(I, \mathbb{R}^n) = \{f: I \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ stetig}\}$ und

$$\|f\|_\infty = \sup\{\|f(x)\| \mid x \in I\}.$$

- (i) Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_\infty$ eine Norm auf $C(I, \mathbb{R}^n)$ erklärt.
- (ii) Zeigen Sie, dass $(C(I, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum ist.

Hinweis: Betrachten Sie eine Cauchyfolge in $C(I, \mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, dass die Glieder der Folge punktweise gegen eine Grenzfunktion konvergieren. Verwenden Sie anschließend die Dreiecksungleichung um zu zeigen, dass die Grenzfunktion in $C(I, \mathbb{R}^n)$ lebt.

Aufgabe 2 (2 Punkte): Sei n eine natürliche Zahl. Dann wird die Menge $M(n, \mathbb{K})$ der quadratischen $n \times n$ -Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{K}$, zusammen mit der (von irgendeiner Vektornorm auf $\mathbb{K}^n$ induzierten) Operatornorm $\|\cdot\|$, zu einer $\mathbb{K}$ -Banachalgebra. Begründen Sie, warum es für eine Matrix A aus $M(n, \mathbb{K})$ Sinn ergibt,

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

zu definieren, und warum wir eine Funktion $\exp: M(n, \mathbb{K}) \rightarrow M(n, \mathbb{K})$ erhalten.

Aufgabe 3 (5+5=10 Punkte): Seien (a, b) ein nichtleeres, offenes Intervall und $\mathbf{B}: (a, b) \rightarrow M(n, \mathbb{R})$ eine stetige Abbildung. Ferner seien t_0 in (a, b) und ein Vektor $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$ in $\mathbb{R}^n$ gegeben. Dann ist

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{B}(t)\mathbf{x}(t)$$

eine lineare Differentialgleichung auf $(a, b) \times \mathbb{R}^n$.

- (i) Führen Sie die Picarditeration für die obige lineare Differentialgleichung mit $(a, b) = (-\varepsilon, \infty)$, $t_0 = 0$, $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$ und einer *konstanten* Abbildung $\mathbf{B}$ durch und geben Sie die Lösung explizit an.

Hinweis: Zeigen Sie per Induktion, dass für eine reelle Zahl t gilt:

$$\mathbf{x}_n(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{B} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{r^k}{k!} \mathbf{B}^k \mathbf{x}_0 \, dr = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} \mathbf{B}^k \mathbf{x}_0.$$

- (ii) Seien λ_1, λ_2 reelle Zahlen. Geben Sie eine Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t)$$

auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ mit $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0) = (1, 4)^t$ an. Berechnen Sie die Einträge des entsprechenden Matrixexponentials explizit.