Universität des Saarlandes
Fachrichtung Mathematik
Dr. Christian Steinhart
Friedrich Günther

Übungen zur Vorlesung „Höhere Mathematik für Ingenieure IV A“
Sommersemester 2025

Blatt 1
Abgabe bis Dienstag, 15. April 2025, 20 Uhr

Aufgabe 1 (2+2+2+2+2=10 Punkte): Der *Regula-Falsi-Algorithmus* ist ein Verfahren zur näherungsweisen Bestimmung von Nullstellen:

Input: Reelle Zahlen $a < b$, stetige Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, sodass $\operatorname{sgn}(f(a))$ und $\operatorname{sgn}(f(b))$ verschieden, Fehlerschranke $\varepsilon > 0$
Output: Stelle c_k in (a,b) mit $|f(c)| < \varepsilon$
$k \leftarrow 0$
$a_0 \leftarrow a$, $b_0 \leftarrow b$, $c_0 \leftarrow a$
while $|f(c_k)| > \varepsilon$ **do**
  $k \leftarrow k+1$
  $c_k \leftarrow \big(a_{k-1}f(b_{k-1}) - b_{k-1}f(a_{k-1})\big)/\big(f(b_{k-1}) - f(a_{k-1})\big)$
  if $\operatorname{sgn}(f(a_k)) = \operatorname{sgn}(f(c_k))$ **then**
    $a_k \leftarrow c_k$, $b_k \leftarrow b_{k-1}$
  end
  else
    $a_k \leftarrow a_{k-1}$, $b_k \leftarrow c_k$
  end
end
return c_k

Wir schreiben hier „$\leftarrow$“ für die Wertzuweisung bei Variablen, um das Gleichheitszeichen nicht zu entfremden.

(i) Welcher Satz aus der reellen Analysis stellt sicher, dass der Regula-Falsi-Algorithmus unter den von uns getroffenen Annahmen eine Nullstelle annähern kann?

Für die restlichen Aufgabenteile soll mit der Programmiersprache `Python` gearbeitet werden. Eine gute kostenlose Dokumentation mit vielen Beispielen gibt es unter https://docs.python.org/3/tutorial. Zum Beispiel mithilfe von `Jupyter Notebooks` kann `Python`-Code bequem im Browser ausgeführt werden, was hoffentlich für eine geringe Einstiegshürde sorgt. Geben Sie *immer* sowohl ihren Code (`.py`-Datei oder `.ipynb`-Datei) als auch die jeweilige geforderte Ausgabe ab! Packen Sie ihre gesamte Abgabe als `.zip`-Datei.

(ii) Schreiben Sie eine `Python`-Funktion `equal_sign(x,y)`, die die Vorzeichen von x und y vergleicht und `True` zurückgibt, wenn die Vorzeichen gleich sind.

(iii) Schreiben Sie eine `Python`-Funktion `regula_falsi_step(f,x,y)`, die den Iterationsschritt des Algorithmus umsetzt und c_k zurückgibt.

(iv) Implementieren Sie eine `Python`-Funktion `regula_falsi(f,a,b,e)`, die überprüft, ob die Randpunkte a und b den Voraussetzungen genügen und abbricht, falls das nicht der Fall ist, und sonst eine näherungsweise Nullstelle von f zurückgibt.

(v) Testen Sie ihre Funktion mit der Eingabe $f = \cos$, $a = -2$, $b = 6$, $e = 0.01$. Welche näherungsweise Nullstelle wird zurückgegeben?

Hinweis: Der folgende Codeschnipsel implementiert den Kosinus als Funktion, die der Methode `regula_falsi(f,a,b,e)` übergeben werden kann:

```
import numpy as numpy

def f(x):
  return numpy.cos(x)
```

Aufgabe 2 (4+2+1+3=10 Punkte): Der $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n)^t \mid x_i \in \mathbb{R}\}$ wird durch

$$\|(x_1, \dots, x_n)^t\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$$

zu einem normierten Vektorraum. Für $1 \leq i \leq n$ bezeichne $\mathrm{pr}_i \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(a_1, \dots, a_n)^t \mapsto a_i$ die i-te Koordinatenprojektion.

(i) Es sei $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie: Genau dann konvergiert $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bezüglich $\|\cdot\|_2$ gegen $\mathbf{x}$ in $\mathbb{R}^n$, wenn jede der Folgen $(\mathrm{pr}_i(\mathbf{x}_k))_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ gegen $\mathrm{pr}_i(\mathbf{x})$ konvergiert.

Bemerkung: Sie haben hiermit gezeigt, dass die Koordinatenprojektionen bezüglich der von $\|\cdot\|_2$ induzierten Topologie auf $\mathbb{R}^n$ stetig sind.

(ii) Es sei $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$. Zeigen oder widerlegen Sie: Wenn $(\|\mathbf{x}_k\|_2)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ konvergiert, dann konvergiert $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^n$.

(iii) Zeigen Sie: Konvergiert $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^n$, dann ist $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge.

(iv) Zeigen Sie: Ist $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}^n$, dann konvergiert $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Hinweis: Sie dürfen wie immer die vorherigen Aufgabenteile verwenden. Sie wissen bereits, dass $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ vollständig ist.