Universität des Saarlandes
Fachrichtung Mathematik
Dr. Christian Steinhart
Friedrich Günther

Übungen zur Vorlesung „Höhere Mathematik für Ingenieure IV A“
Sommersemester 2025

Blatt 7
Abgabe bis Dienstag, 27. Mai 2025, 20 Uhr

Aufgabe 1 (3+1+3+3=10 Punkte): Sei A in $\mathbb{R}^{n\times n}$ eine orthogonale Matrix, d. h. $A^t A = I_n$. Es bezeichne $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$, $A_1,\dots,A_n$ die Spalten von A und ${}_1A,\dots,{}_nA$ die Zeilen von A. Zeigen Sie:

(i) Die Menge $\{A_1,\dots,A_n\}$ ist bzgl. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$.

(ii) Die Menge $\{{}_1A,\dots,{}_nA\}$ ist bzgl. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$.

(iii) Für v und w aus $\mathbb{R}^n$ gilt $\langle Av, Aw\rangle = \langle v, w\rangle$.

(iv) Ist B in $\mathbb{R}^{n\times n}$ und gilt für alle v und w aus $\mathbb{R}^n$, dass $\langle Bv, Bw\rangle = \langle v, w\rangle$, dann ist B orthogonal.

Aufgabe 2 (2 Punkte): Wir erinnern an das Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren: Ist $(v_1,\dots,v_r)$ ein Tupel linear unabhängiger Vektoren im $\mathbb{R}^n$, welcher mit dem Standardskalarprodukt und der induzierten Norm $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ ausgestattet ist, dann erhält man eine Orthonormalbasis $(f_1,\dots,f_r)$ für $E = \mathrm{Lin}(v_1,\dots,v_r)$ wie folgt. Man setzt $f_1 = v_1/\|v_1\|$, und für $2 \le j \le r$ berechnet man

$$f_j = \frac{v_j - \sum_{k=1}^{j-1}\langle f_k, v_j\rangle f_k}{\|v_j - \sum_{k=1}^{j-1}\langle f_k, v_j\rangle f_k\|}.$$

Die Abbildung

$$\pi_E\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow E, \qquad b \longmapsto \sum_{j=1}^{r}\langle b, f_j\rangle f_j$$

heißt *orthogonale Projektion auf* E. Ist b aus $\mathbb{R}^n$, dann gilt $\langle b - \pi_E(b), v\rangle = 0$ für alle v aus E.

Zeigen Sie: $\inf\{\|w - b\| \mid w \in E\}$ wird von $\pi_E(b)$ realisiert.

Hinweis: Verwenden Sie den Satz des Pythagoras für Skalarprodukte.

Aufgabe 3 (2+2+2+2(+2)=8(+2) Punkte): Im Vektorraum $\mathbb{R}^4$ betrachten wir die Ebene $E = \mathrm{Lin}((1, -1, -1, 1)^t, (-1, 0, 1, -2)^t)$.

(i) Bestimmen Sie mithilfe des Gram-Schmitschen Orthonormalisierungsverfahrens eine Orthonormalbasis für E.

(ii) Bestimmen Sie für $b = (1, 2, 3, 4)^t$ die Projektion $\pi_E(b)$.

(iii) Bestimmen Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

eine QR-Zerlegung. Sie dürfen zur Bestimmung der Zerlegung `NumPy`-Funktionen verwenden. Begründen Sie, warum $Ax = b$ keine Lösung besitzt.

(iv) Bestimmen Sie mithilfe der QR-Zerlegung eine Lösung, die $\|Ax - b\|$ minimiert. Was fällt Ihnen auf? Wieder dürfen Sie `NumPy`-Funktionen verwenden.

(v) Zeigen Sie, dass eine minimierende „Lösung“ x eine Lösung der Normalgleichung $A^t Ax = A^t b$ ist.

Weitere Informationen zu diesem Phänomen finden Sie in *Stoer/Bulirsch: Numerische Mathematik 1, Zehnte Auflage, Kapitel 4.8 Lineare Ausgleichsrechnung.*