Universität des Saarlandes
Fachrichtung Mathematik
Dr. Christian Steinhart
Friedrich Günther

Übungen zur Vorlesung „Höhere Mathematik für Ingenieure IV A“
Sommersemester 2025

Blatt 6
Abgabe bis Dienstag, 20. Mai 2025, 20 Uhr

Aufgabe 1 (2+2=4 Punkte): Für eine Matrix M aus $\mathbb{C}^{n\times n}$ heißt $M^* = \overline{M}^t$ die adjungierte Matrix. Die komplexe Konjugation ist eintragsweise zu verstehen. Es heißt

$$\rho(M) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \operatorname{Spec}(M)\}$$

der *Spektralradius von* M, und $\|M\|_2 = \sqrt{\rho(M^*M)}$ die 2-Norm auf $\mathbb{C}^{n\times n}$. Das Produkt M^*M ist hermitesch und positiv semidefinit, sodass diese Definition wie im reellen Fall Sinn ergibt.

Seien A in $\mathbb{C}^{n\times n}$ und $\|\cdot\|\colon \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ eine von einer Vektornorm induzierte Matrixnorm.

(i) Zeigen Sie, dass $\rho(A) \leq \|A\|$.

(ii) Zeigen Sie, dass $\rho(A) = \|A\|_2$ für hermitesches A gilt.

Aufgabe 2 (2+2+2+4=10 Punkte): Seien A in $\mathbb{R}^{n\times n}$ eine diagonalisierbare Matrix mit normierter Basis aus Eigenvektoren $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$, und $\mathbf{x}$ aus $\mathbb{R}^n$ mit $\|\mathbf{x}\| = 1$ sowie $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i$.

(i) Zeigen Sie, dass für die natürliche Zahl m gilt: $A^m\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i^m \mathbf{v}_i$.

(ii) Wir nehmen an, dass die Eigenwerte betragsmäßig geordnet sind, genauer: $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$. Untersuchen Sie per Fallunterscheidung, ob $(\mathbf{x}^{(m)})_{m\in\mathbb{N}} = (A^m\mathbf{x})_{m\in\mathbb{N}}$ konvergiert und geben Sie im Falle der Konvergenz den Grenzwert an.

Hinweis: Beachten Sie bei der Fallunterscheidung, dass $|\lambda_1|$ eine Bedeutung für die Konvergenz des Iterationsverfahrens hat!

(iii) Verschärft man die Bedingungen aus (ii) zu $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \ldots$ und betrachtet man die Folge $(\mathbf{y}_m)_{m\in\mathbb{N}} = (A^m\mathbf{v}/\|A^m\mathbf{v}\|)_{m\in\mathbb{N}}$, dann konvergiert das Verfahren bei Wahl eines geeigneten Startvektors.

Schreiben Sie eine Funktion `eigenvalue_iteration(A, v, e)`, die das Potenzverfahren implementiert und abbricht, wenn $\|\mathtt{y}^m - \mathtt{y}^{m+1}\| < \mathtt{e}$.

(iv) Für eine Matrix A ist

$$\kappa_{\|\cdot\|_2}(A) = \Big((\max\{\sigma \mid \sigma \in \mathrm{Spec}(AA^t)\})(\max\{\mu \mid \mu \in \mathrm{Spec}(A^{-t}A^{-1})\})\Big)^{1/2}$$

die *spektrale Konditionszahl*. Schreiben Sie eine Funktion `condition_for_matrix(A,v,e)`, die eine Matrix `A`, einen Startwert `v` und eine Fehlerschranke `e` einliest, und eine Annäherung an $\kappa_{\|\cdot\|_2}(\mathtt{A})$ ausgibt.

Wenden Sie Ihre Funktion auf die Matrizen der Gleichung

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = LR.$$

an. Verwenden Sie den Startwert `s = [[1],[1]]` und die Fehlerschranke `e = 0.0001`. Welches Ergebnis erhalten Sie? Was fällt Ihnen auf?

Aufgabe 3 (2+4+2=8 Punkte): Vom Dach des Physikturms wird eine Wassermelone fallen gelassen. Das Spektakel wird vom Dach des Chemieturms aus mit einer Handykamera festgehalten. Leider ist das Videomaterial in 24 Bildern pro Sekunde angefertigt worden, und Bewegungsunschärfe erschwert eine genaue Bestimmung der zurückgelegten Strecke der Melone pro Bild. Es ergeben sich folgende Messwerte:

$(\Delta s_1, \Delta f_1) = (0.15\text{m}, 4)$, $(\Delta s_2, \Delta f_2) = (0.65\text{m}, 6)$, $(\Delta s_3, \Delta f_3) = (1.9\text{m}, 9)$,
$(\Delta s_4, \Delta f_4) = (5.3\text{m}, 11)$, $(\Delta s_5, \Delta f_5) = (3.5\text{m}, 7)$, $(\Delta s_6, \Delta f_6) = (12.5\text{m}, 13)$.

Dabei meint Δs_i den zurückgelegten Weg der Melone zwischen Bild f_{i-1} und Bild $f_{i-1} + \Delta f_i$.

Wir vermuten eine Polynomfunktion $s_{a,b,c}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto at^2 + bt + c$, die den zurückgelegten Weg $s(t)$ zum Zeitpunkt t beschreibt. Zur Bestimmung dieser Polynomfunktion gehen wir wie folgt vor:

(i) Wir betrachten die Funktion

$$F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad (a,b,c) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} (s_{a,b,c}(t_i) - s_i)^2$$

Berechnen Sie aus den gegebenen Messwerten die benötigten Größen s_i und Zeitpunkte t_i. Schreiben Sie die Gleichung $\operatorname{grad} F = 0$ als lineares Gleichungssystem $A(a,b,c)^t = \mathbf{y}$.

(ii) Lösen Sie das Gleichungssystem mithilfe der Choleskyzerlegung vom letzten Blatt.

(iii) Plotten Sie die Messwerte, den Graph der Funktion $s_{a,b,c}$ und den Graph der zugehörigen Simulation in einem Diagramm.