Universität des Saarlandes
Fachrichtung Mathematik
Dr. Christian Steinhart
Friedrich Günther

Übungen zur Vorlesung „Höhere Mathematik für Ingenieure IV A“
Sommersemester 2025

Blatt 5
Abgabe bis Dienstag, 13. Mai 2025, 20 Uhr

Aufgabe 1 (3+2=5 Punkte): Seien n eine natürliche Zahl und A eine komplexe $n \times n$-Matrix. Für einen Index j bezeichne $R_j = \sum_{i \neq j} |a_{i,j}|$. Wir schreiben $\operatorname{Spec} A = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \exists v \in \mathbb{C}^n - \{0\} : Av = \lambda v\}$.

(i) Zeigen Sie: Ist λ ein Eigenwert von A und ist v ein von Null verschiedener Eigenvektor, dann ist $|\lambda - a_{k,k}| \leq R_k$ für einen geeigneten Index k.

Hinweis: Betrachten Sie die Vektorgleichung $Av = \lambda v$ komponentenweise. Denken Sie über die Dreiecksungleichung und die Supremumsnorm nach.

(ii) Folgern Sie, dass $\operatorname{Spec} A \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} \operatorname{cl}(B(a_{j,j}, R_j))$. Hierbei meint $\operatorname{cl}(-)$ den Abschluss, d. h. $\operatorname{cl}(B(a_{j,j}, R_j)) = \{z \in \mathbb{C} \mid |a_{j,j} - z| \leq R_j\}$.

Aufgabe 2 (2+3=5 Punkte): Seien a und b reelle Zahlen mit $a < b$ und $u \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Ist h eine weitere reelle Zahl und ist x eine Stelle in $[a, b]$ derart, dass $[x - h, x + h] \subseteq [a, b]$, dann ist

$$\Delta_h u(x) = \frac{u(x-h) - 2u(x) + u(x+h)}{h^2} \approx u''(x).$$

Man nennt diese Annäherung der Ableitung eine Annäherung durch finite Differenzen.

Ist nun N eine positive natürliche Zahl und $h = (b - a)/(N + 1)$, dann heißt

$$\Omega_h = \{a + jh \mid 0 \leq j \leq N + 1\} \subseteq [a, b]$$

äquidistantes Gitter mit Schrittweite h. Meistens schreibt man $\Omega_h^\circ = \Omega_h - \{a, b\}$. Eine Funktion $u \colon \Omega_h \to \mathbb{R}$ wird eine Gitterfunktion genannt, und kann mit einem Element von $\mathbb{R}^{N+2}$, nämlich $(u(a+jh))_{0\le j\le N+1}$, identifiziert werden. Ist $u\colon \Omega_h^0 \to \mathbb{R}$ eine Funktion, dann ist die Gitterfunktion $h^{-2}Au$ eine Annäherung an die zweite Ableitung von $-u$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(N+2)\times(N+2)}.$$

(i) Bestimmen Sie die Einträge von $h^{-2}Au$.

(ii) Zeigen Sie, dass A positiv definit ist.

Hinweis: Man kann für diese spezielle Matrix die Ungleichung aus Aufgabe 1(i) verbessern.

Mithilfe des obigen Verfahrens kann man das Anfangswertproblem

$$-u''(x) = f(x), \qquad u(a) = u(b) = 0$$

numerisch lösen. (Numerische Untersuchungen der Annäherung der zweiten Ableitung etc. sind selbstverständlich nötig, welche zeigen, dass das Verfahren das Gewünschte leistet.) Ist $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, dann gehört dazu die Gitterfunktion $f = (F(a+jh))_{0\le j\le N+1}$, und dann liefert eine Lösung des linearen Gleichungssystems $h^{-2}Au = f$ eine Gitterfunktion u, die das Anfangswert näherungsweise löst.

Aufgabe 3 (3+3+2+2=10 Punkte):

(i) Schreiben Sie eine Funktion `forward_substitution(L,b)`, die eine untere Dreiecksmatrix `L` sowie eine rechte Seite `b` einliest, und die Lösung `x` von `Lx=b` zurückgibt.

(ii) Schreiben Sie eine Funktion `backward_substitution(R,b)`, die eine obere Dreiecksmatrix `R` sowie eine rechte Seite `b` einliest, und die Lösung `x` von `Rx=b` zurückgibt.

(iii) Wir betrachten auf dem Intervall $[0,1]$ das Anfangswertproblem

$$-u''(x) = \sin(x), \qquad u(0) = u(1) = 0.$$

Lösen Sie das Anfangswertproblem analytisch.

(iv) Schreiben Sie ein Programm, das mithilfe von Choleskyzerlegung ein lineares Gleichungssystem `Ax=b` löst. Sie dürfen den Code aus der Vorlesung verwenden.

Testen Sie ihr Programm mit A aus Aufgabe 2 für $N = 4$, $h = 1/5$ und die rechte Seite $f = (\sin(jh))_{0 \leq j \leq 5}$. Welche Lösung erhalten Sie?