Universität des Saarlandes
Fachrichtung Mathematik
Dr. Christian Steinhart
Friedrich Günther

Übungen zur Vorlesung „Höhere Mathematik für Ingenieure IV A"
Sommersemester 2025

Blatt 3
Abgabe bis Dienstag, 29. April 2025, 20 Uhr

Aufgabe 1 (2+1+1+2+1+3=10 Punkte): Sei

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto x^2 + y^2 - \sin(x) - xy + 3x.$$

Wir bestimmen in dieser Aufgabe mithilfe des mehrdimensionalen Newtonverfahrens, angewendet auf $\operatorname{grad} f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, einen Kandidaten für eine Extremstelle von f. Dabei folgen wir folgender Konvention: *Matrizen werden zeilenweise gespeichert und Vektoren als Zeilenvektoren aufgefasst.* Matrizen und Vektoren setzen wir mithilfe des Datentyps `list` in `Python` um.

(i) Berechnen Sie für (ξ_1, ξ_2) in $\mathbb{R}^2$ von Hand sowohl $\operatorname{grad} f(\xi_1, \xi_2)$ als auch $\operatorname{Hess} f(\xi_1, \xi_2)$.

(ii) Zeigen Sie: Hat f eine lokale Extremstelle, dann handelt es sich um ein lokales Minimum.

(iii) Plotten Sie den Graphen von f mithilfe von Niveaulinien, siehe zum Beispiel hier. Speichern Sie ihren Plot als `pdf` und geben Sie die Datei mit ab.

(iv) Implementieren Sie `evaluate_grad_f(x,y)` und `evalute_Hess_f(x,y)`, die jeweils $\operatorname{grad} f(x, y)$ respektive $\operatorname{Hess} f(x, y)$ zurückgeben.

(v) Implementieren Sie eine Funktion `invert_matrix(A,e)`, die eine 2×2-Matrix `A` und eine Fehlerschranke `e` einliest, und falls $|\det \mathtt{A}| > \mathtt{e}$ gilt, die Inverse von `A` zurückgibt, sonst die Nullmatrix.

(vi) Implementieren Sie eine Funktion `newton_iteration(s,e)`, die einen Startwert `s` aus $\mathbb{R}^2$ und eine reelle Fehlerschranke `e` einliest, und mit einer näherungsweisen Extremstelle von f antwortet. Verwenden Sie „$\|\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_n)\|_2 \geq$ `e`" als Abbruchbedingung. Testen Sie Ihre Funktion mit `s = [-2.5,-1]` und `e = 0.001`. Wie viele Iterationen sind nötig? Welcher Kandidat für eine Extremstelle wird zurückgegeben?

Aufgabe 2 (2+3+3+2=10 Punkte): Wir wollen in dieser Aufgabe numerisch die Werte von $\arcsin\colon [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ bestimmen.

(i) Zeigen Sie, dass es für jedes y in $[-1, 1]$ ein eindeutiges $x = \arcsin(y)$ in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ gibt, sodass $\sin(x) = y$.

(ii) Schreiben Sie das Problem als Nullstellenproblem und geben Sie das zugehörige Newton-Verfahren, d. h. die zugehörige Iterationsvorschrift, zur Berechnung der Nullstelle an.

(iii) Zeigen Sie, dass das Newton-Verfahren aus (ii) mit Startwert $x_0 = 0$ stets gegen eine Nullstelle x^* in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ konvergiert.

(iv) Geben Sie mit einer kurzen Begründung an, ob das Newton-Verfahren für alle Startwerte x_0 aus $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ gegen eine Lösung $\arcsin(y)$ konvergiert und geben Sie gegebenenfalls an, welche Bedingung aus Satz 1.12 verletzt wird.

Hinweis Sie dürfen aus der HMI 1 verwenden, dass die Sinus- und Kosinusfunktionen stetig sind und was jeweils ihre Ableitungen sind.

Aufgabe 3 (3+1+2+3+1=10 Bonuspunkte): Ist V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, sind $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|'$ Normen auf V und gibt es Konstanten $c, C > 0$, sodass für alle $\mathbf{x}$ in V gilt, dass

$$c\|\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x}\|' \leq C\|\mathbf{x}\|,$$

dann heißen die beiden Normen äquivalent. Zwei äquivalente Normen erzeugen dieselben Topologien, d. h. sind für topologische Betrachtungen (offene und abgeschlossene Mengen, Grenzwerte, etc.) austauschbar.

Wir zeigen im Laufe dieser Aufgabe, dass jede Norm auf $\mathbb{R}^n$ äquivalent zur euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$ auf $\mathbb{R}^n$ ist.

(i) Zeigen Sie den Satz von Bolzano-Weierstraß für $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ unter Verwendung des Satzes von Bolzano-Weierstraß für $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, d. h. zeigen Sie: Ist $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$ und gibt es eine Konstante $K > 0$, sodass $\|\mathbf{x}_k\|_2 \leq K$ für alle k in $\mathbb{N}$, dann gibt es eine konvergente Teilfolge $(\mathbf{x}_{k_\ell})_{\ell\in\mathbb{N}}$.

Hinweis Verwenden Sie Induktion nach n.

(ii) Zeigen Sie: Ist $\mathbf{x}$ ein von Null verschiedenes Element des $\mathbb{R}^n$, dann liegt $\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|_2$ in der Einheitssphäre $\mathbb{S}^{n-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\|_2 = 1\}$.

(iii) Sei $\|\cdot\|$ irgendeine Norm auf $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie für $x = \sum_{j=1}^n x_j \mathbf{e}_j$, dass

$$\|\mathbf{x}\| \leq \left(\sum_{j=1}^n \|\mathbf{e}_j\| \right) \|\mathbf{x}\|_2.$$

Wir schreiben im Folgenden $C = \sum_{j=1}^n \|\mathbf{e}_j\|$.

(iv) Zeigen Sie, dass $c = \inf\{\|\mathbf{x}\| \mid \mathbf{x} \in \mathbb{S}^{n-1}\} > 0$.

Hinweis Verwenden Sie Aufgabenteil (iii), um Aufgabenteil (i) verwenden zu können. Achten Sie darauf, dass $\mathbb{S}^{n-1}$ bezüglich $\|\cdot\|_2$ definiert ist und Sie entsprechend für $\mathbf{x}$ in $\mathbb{S}^{n-1}$ nur wissen, dass $\|\mathbf{x}\| \leq C$. Sie dürfen verwenden, dass $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|_2$ stetig ist.

(v) Zeigen Sie: Für jedes $\mathbf{x}$ in $\mathbb{R}^n$ gilt $c\|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\| \leq C\|\mathbf{x}\|_2$.