Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung 6.1 Mathematik
Dr. C. Steinhart

6. Übungsblatt zu Grundzüge der Höheren Mathematik 3 im WS 2024/25

Aufgabe 1. (3P+2P+3P)

Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{7\times 7}$ mit der Jordan-Normalform

$$J(A) := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie $\mathrm{Spec}(A)$ sowie $a(\lambda)$ und $g(\lambda)$ für alle $\lambda \in \mathrm{Spec}(A)$.

b) Ist A diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Finden Sie eine Matrix B die nicht ähnlich zu A ist, aber die gleichen Eigenwerten mit den gleichen algebraischen und geometrischen Vielfachheiten wie A hat. Begründen Sie wie immer Ihre Antwort.

Aufgabe 2. (3P+4P+2P+3P)

Gegeben seien die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -10 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Nach Blatt 5 hat A als Basis von Eigenvektoren über $\mathbb{C}$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -10 \\ 1+2i \\ 5 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \overline{v_2} = \begin{pmatrix} -10 \\ 1-2i \\ 5 \end{pmatrix}$$

zu den Eigenwerten $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1+2i$ und $\lambda_3 = 1-2i$. Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem von reellen Lösungen für das homogene System von DGL $\underline{\mathbf{y}}' = A \cdot \underline{\mathbf{y}}$.

b) Bestimmen Sie sämtliche Eigenwerte und Haupträume von B.

c) Geben Sie eine Jordan-Normalform $J(B)$ von B sowie die zugehörige Basiswechselmatrix S mit $S^{-1}BS = J(B)$ an.

d) Finden Sie ein Fundamentalsystem von Lösungen für das homogene System $\underline{\mathbf{y}}' = B \cdot \underline{\mathbf{y}}$ und prüfen Sie nach, dass es sich tatsächlich um ein Fundamentalsystem von Lösungen für das System handelt.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Dienstag den 03. 12. 2024 um 22 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihrer Abgabepartner gut lesbar auf Ihre Abgabe.

Aufgabe 3. (2P+3P+3P+2P)

a) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix die sich durch Basiswechsel mit einer orthogonalen Matrix $S \in O_n(\mathbb{R})$ auf Diagonalgestalt bringen lässt, d.h. es gilt

$$S^{-1}AS = S^TAS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \text{mit } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass dann bereits A symmetrisch ist.

b) Wir betrachten in Abhängigkeit der Variable $t \in \mathbb{R}$ die Matrix

$$A_t := \begin{pmatrix} 0 & 3-t \\ t-1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ ist A_t mit einer Orthogonalmatrix diagonalisierbar?

(ii) Für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ ist A_t über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar?

(iii) Für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ ist A_t über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar?

Aufgabe 4. (3P+5P+2P)

Die Fibonacci-Zahlen sind gegeben durch die rekursive Formel

$$a_0 := 0, \quad a_1 := 1, \quad a_{n+1} := a_n + a_{n-1} \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

Wir wollen mittels diagonalisierbarer Matrizen eine explizite Formel für die Fibonacci-Zahlen konstruieren. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

a) Finden Sie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Folgern Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ wir die n-te Fibonacci-Zahl bestimmen können mittels

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = A^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) Finden Sie eine Basiswechselmatrix $S \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ und eine Diagonalmatrix $D := \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, sodass $A = SDS^{-1}$ gilt.

c) Rechnen Sie A^n mit Hilfe von S und D aus Teil b) aus und geben Sie eine explizite Formel für a_n an. Prüfen Sie Ihre Formel einmal für $n = 1$ und für $n = 8$ nach.

Hinweis: *Terme der Form $(a + \sqrt{b})^n$ brauchen Sie nicht auszurechnen und benutzen Sie für den Test einen Taschenrechner.*

Das Übungsblatt kann bis spätestens Dienstag den 03. 12. 2024 um 22 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihrer Abgabepartner gut lesbar auf Ihre Abgabe.