Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung 6.1 Mathematik
Dr. C. Steinhart

5. Übungsblatt zu Grundzüge der Höheren Mathematik 3 im WS 2024/25

Aufgabe 1. (5P+2P+4P+3P+5 Bonuspunkte)

Für $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ sei

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

die Matrix mit Einsen auf der oberen Nebendiagonalen, $-a_0, \dots, -a_{n-1}$ in der letzten Zeile und ansonsten Nullen.

a) Zeigen Sie, dass für das charakteristische Polynom von A gilt:

$$\chi_A(X) = (-1)^n \cdot \left(X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i\right).$$

Hinweis: *Entwickeln Sie nach der ersten Spalte und benutzen Sie Induktion.*

b) Gegeben sei die homogene, lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$y^{(n)} + b_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + b_1 y' + b_0 y = 0.$$

Schreiben Sie mit $\underline{\mathbf{y}}_i := y^{(i-1)}$ die Differentialgleichung um in das System

$$\underline{\mathbf{y}}' = B \cdot \underline{\mathbf{y}}.$$

Finden Sie einen Zusammenhang vom charakteristischen Polynom der Differentialgleichung zum charakteristischen Polynom von B.

c) Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A. Zeigen Sie, dass dann der Vektor $v_\lambda := \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ ist.
Bonus: Zeigen Sie, dass für A alle Eigenvektoren von der Form $t \cdot v_\lambda$ für $t \in \mathbb{R}$ sind.

d) Bestimmen Sie sämtliche Eigenräume der Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Das Übungsblatt kann bis spätestens Dienstag den 26. 11. 2024 um 22 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihrer Abgabepartner gut lesbar auf Ihre Abgabe.

Aufgabe 2. (7P+3P)

Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -10 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle komplexen Eigenwerte und Eigenräume von A.

b) Geben Sie jeweils mit einer kurzen Begründung an, ob A über $\mathbb{C}$ bzw. über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar ist. Geben Sie gegebenenfalls eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ an, sodass $S^{-1}AS = D$ für eine Diagonalmatrix D gilt und überprüfen Sie Ihr Ergebnis.

Aufgabe 3. (3P+4P)

Wir betrachten wieder die 2π-periodische Funktion

$$f : [0, 2\pi) : \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & , \text{ falls } 0 \leq x < \pi \\ -1 & , \text{ falls } \pi \leq x < 2\pi \end{cases}$$

von letztem Blatt zusammen mit ihrer Fourier-Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n \cdot x) \qquad \text{mit } a_n = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \frac{4}{n\pi}, & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

a) Gegen welche Funktion konvergiert die Fourier-Reihe punktweise? Geben Sie ein Intervall $[a, b]$ mit $a < b$ an, auf dem die Fourier-Reihe gleichmäßig konvergiert.

b) Finden Sie das kleinste $N \in \mathbb{N}$, sodass für den mittleren quadratischen Abstand

$$Q_N := \int_0^{2\pi} \left(f(x) - \sum_{n=1}^{N} a_n \sin(n \cdot x) \right)^2 dx$$

die Ungleichung $Q_N < \frac{1}{3}$ gilt.

Aufgabe 4. (2P+5P+2P)

Wir betrachten die periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Periode 4 gegeben durch:

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in \mathbb{Z} \\ x, & \text{falls } 0 < x < 1 \\ 2 - x, & \text{falls } 1 < x < 3 \\ x - 4, & \text{falls } 3 < x < 4 \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie den Graphen von f auf dem Intervall $[-4, 4]$.

b) Berechnen Sie die Fourier-Reihe von f.

c) Gegen welche Funktion konvergiert die Fourier-Reihe von f punktweise? Wo konvergiert die Reihe gleichmäßig?

Das Übungsblatt kann bis spätestens Dienstag den 26. 11. 2024 um 22 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihrer Abgabepartner gut lesbar auf Ihre Abgabe.