Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung 6.1 Mathematik
Dr. C. Steinhart

4. Übungsblatt zu Grundzüge der Höheren Mathematik 3 im WS 2024/25

Aufgabe 1. (2P+6P+3P+4P)

Zwei Massen m_1 und m_2 werden durch eine Feder miteinander verbunden. Seien $y_1(t)$ und $y_2(t)$ jeweils die Auslenkungen der Massen zum Zeitpunkt t, dann wirkt jeweils auf die Masse m_i die Beschleunigung [1]

$$y_1''(t) = \frac{y_2(t) - y_1(t)}{m_1} \quad \text{und} \quad y_2''(t) = \frac{y_1(t) - y_2(t)}{m_2}.$$

a) Stellen Sie das zugehörige System von (linearen) Differentialgleichungen erster Ordnung für obiges Problem auf.

b) Durch Beobachtung wird vermutet, dass mögliche Lösungen durch

$$^{(1)}y_i(t) = c_i \cos(\omega t) \qquad \text{und} \qquad ^{(2)}y_i(t) = d_i \sin(\omega t)$$

für ein $\omega \in \mathbb{R}_{>0}$ gegeben sind. Finden Sie mit diesem Ansatz Lösungen des Systems und prüfen Sie nach, dass es sich tatsächlich um Lösungen handelt.

c) Finden Sie mit dem Ansatz $y_1(t) = y_2(t)$ weitere Lösungen des Systems.

d) Bilden Sie mit jeweils zwei verschiedenen Lösungen aus b) und c) ein Fundamentalsystem des (homogenen) Systems und zeigen Sie, dass dies tatsächlich ein Fundamentalsystem ist. Was ist die zugehörige Fundamentalmatrix?

Aufgabe 2. (3P+7P)

Für $x \neq 0$ betrachten wir die Matrix

$$A(x) := \begin{pmatrix} 1/x & -\frac{1}{x^2} \\ 2 & -\frac{1}{x} \end{pmatrix}.$$

a) Wir betrachten auf $I = (0, \infty)$ das homogene System

$$\underline{y}' = A(x) \cdot \underline{y}.$$

Zeigen Sie, dass $Y(x) := \begin{pmatrix} 1 & 1/x \\ x & 2 \end{pmatrix}$ eine Fundamentalmatrix für das System ist.

b) Finden Sie mit Hilfe der Variation der Konstanten eine Lösung für das inhomogene System

$$\underline{y}' = A(x) \cdot \underline{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$$

und lösen Sie das Anfangswertproblem mit $\underline{y}(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

[1] Wir gehen hier davon aus, dass die beiden Massen nicht miteinander kollidieren.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Dienstag den 19. 11. 2024 um 22 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihrer Abgabepartner gut lesbar auf Ihre Abgabe.

Aufgabe 3. (4P+4P)

Sei I ein Intervall und ${}^{(1)}\underline{y} : I \to \mathbb{R}^3$ eine vektorwertige, eintragsweise differenzierbare Funktion mit ${}^{(1)}\underline{y}(x_i) \neq 0$ für $x_i \in \{\pm 1, 0\}$. Seien weiterhin ${}^{(2)}\underline{y}(x) := x \cdot {}^{(1)}\underline{y}(x)$ und ${}^{(3)}\underline{y}(x) := x^2 \cdot {}^{(1)}\underline{y}(x)$.

a) Zeigen Sie, dass dann die drei Funktionen ${}^{(1)}\underline{y}(x), {}^{(2)}\underline{y}(x)$ und ${}^{(3)}\underline{y}(x)$ linear unabhängig sind.

b) Zeigen Sie, dass es kein homogenes System von linearen Differentialgleichungen

$$\underline{y}' = A(x) \cdot \underline{y}$$

gibt, für das sowohl ${}^{(1)}\underline{y}(x)$, ${}^{(2)}\underline{y}(x)$ als auch ${}^{(3)}\underline{y}(x)$ Lösungen sind. Warum widerspricht das nicht dem Exponentialansatz für lineare Differentialgleichungen mit den Lösungen $y_1(x) = e^{\lambda x}, y_2(x) = x \cdot e^{\lambda x}$ und $y_3(x) = x^2 \cdot e^{\lambda x}$?
Hinweis: *Was ist die Determinante von linear abhängigen Vektoren?*

Aufgabe 4. (2P+5P)

Gegeben sei die 2π-periodische Funktion gegeben durch

$$f : [0, 2\pi) : \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & , \text{ falls } 0 \leq x < \pi \\ -1 & , \text{ falls } \pi \leq x < 2\pi \end{cases}.$$

a) Skizzieren Sie f im Intervall $[-2\pi, 4\pi]$. Ist f eine gerade oder ungerade Funktion?

b) Bestimmen Sie die Fourier-Reihe von f.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Dienstag den 19. 11. 2024 um 22 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihrer Abgabepartner gut lesbar auf Ihre Abgabe.