Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung 6.1 Mathematik
Dr. C. Steinhart

3. Übungsblatt zur Grundzüge der Höheren Mathematik 3 im WS 2024/25

Aufgabe 1. (5P+5P)

a) Berechnen Sie mit Hilfe des Ansatzes der rechten Seite eine allgemeine Lösung für die Differentialgleichung

$$y'' - 9y = x \cdot e^{3x}$$

und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem mit $y(0) = 1$ und $y'(1) = 0$.

b) Seien $a, b, \omega \in \mathbb{R}_{>0}$ drei echt positive reelle Zahlen. Finden Sie in Abhängigkeit von a, b und ω eine spezielle Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + ay' + by = \cos(\omega x) + \sin(\omega x).$$

Aufgabe 2. (5P+4P+2P+2P)

a) Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' + xy^2 = x.$$

Finden Sie mit Hilfe der Trennung der Variablen eine Lösung des zugehörigen Anfangswertproblems mit $y(1) = 0$. Für welche Werte von x ist diese definiert?
Hinweis: *Sie dürfen wieder für Stammfunktionen eine Formelsammlung benutzen.*

b) Wir betrachten einen gefüllten Wasserbehälter mit einem relativ kleinen Ausfluss am Boden und einem konstanten Zufluss F. Die Füllhöhe $y(t)$ zum Zeitpunkt t lässt sich beschreiben durch die Differentialgleichung

$$y' = F - C \cdot \sqrt{y}$$

für geeignete Konstante $C, F \in \mathbb{R}_{>0}$. Lösen Sie jeweils das zugehörige Anfangswertproblem für die folgenden Konstanten und Startwerte mit Hilfe der Trennung der Variablen und geben Sie an für welche Intervalle dies tatsächlich eine Lösung ist:

(i) $C = 2, F = 0$ und $y(0) = 2$

(ii) $C = 1, F = 1$ und $y(0) = 1$

(iii) $C = 0, F = 2$ und $y(0) = 0$

Das Übungsblatt kann bis spätestens Dienstag den 12. 11. 2024 um 22 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihrer Abgabepartner gut lesbar auf Ihre Abgabe.

Aufgabe 3. (4P+4P)

Gegeben sei eine explizite Differentialgleichung $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ n-ter Ordnung mit einer Lösung y_s. Wie in der Vorlesung können wir die Differentialgleichung umschreiben zu einem System von Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\underline{y}' := \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_{n-1}' \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ \vdots \\ y_n \\ f(x, y_1, \ldots, y_n) \end{pmatrix}$$

a) Finden Sie mit Hilfe der Lösung y_s eine Lösung ${}^{(s)}\underline{y}$ des Systems.

b) Sei nun zusätzlich $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ eine lineare, homogene Differentialgleichung mit Fundamentalsystem $\mathcal{F} = (y_1, \ldots, y_n)$. Zeigen Sie, dass die zugehörigen Lösungen ${}^{(i)}\underline{y}$ des Systems aus a) wieder ein Fundamentalsystem der Lösungen des Systems bilden.

Aufgabe 4. (2P+2P+4P)

Wir betrachten die homogene, lineare Differentialgleichung

$$y'' + 2y' - 8y = 0.$$

a) Finden Sie die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung.

b) Führen Sie die Gleichung aus a) auf ein homogenes System

$$\underline{y}' = A(x)\underline{y}$$

linearer Differentialgleichungen erster Ordnung zurück.

c) Finden Sie mit Hilfe von a) ein Fundamentalsystem $\mathcal{F} = ({}^{(1)}\underline{y}, {}^{(2)}\underline{y})$ von Lösungen für das System aus b). Machen Sie anschließend eine Probe, dass Sie tatsächlich ein Fundamentalsystem haben, d.h. prüfen Sie, dass ${}^{(1)}\underline{y}, {}^{(2)}\underline{y}$ Lösungen und linear unabhängig sind.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Dienstag den 12. 11. 2024 um 22 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihrer Abgabepartner gut lesbar auf Ihre Abgabe.