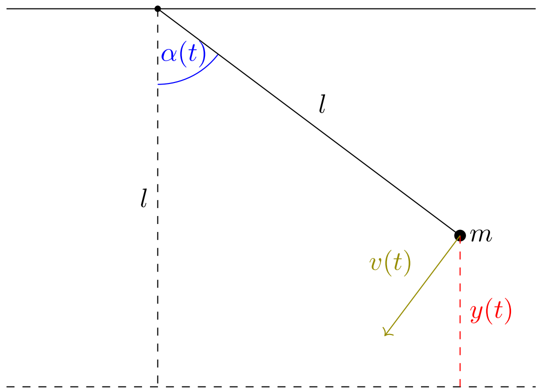
Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung 6.1 Mathematik
Dr. C. Steinhart

1. Übungsblatt zur Grundzüge der Höheren Mathematik 3 im WS 2024/25

Aufgabe 1. (6P+2P+2P)

Gegeben sei ein Gewicht der Masse m das frei an einem Seil der Länge l schwingt.



Zum Zeitpunkt t ist die Auslenkung der Masse durch den Winkel $\alpha(t)$ gegeben. Nach dem Energieerhaltungssatz ist die Gesamtenergie des System $E = E_{kin}(t) + E_{pot}(t)$ stets konstant. Hierbei bezeichnet

$$E_{kin}(t) = \frac{1}{2} m \cdot v(t)^2$$

mit Bahngeschwindigkeit $v(t)$ die kinetische Energie[1] und

$$E_{pot}(t) = y(t) \cdot m \cdot g$$

mit vertikaler Auslenkung $y(t)$ die potentielle Energie zum Zeitpunkt t.

a) Stellen Sie für das System mit Hilfe des Energieerhaltugnssatzes eine Differentialgleichung erster Ordnung in Abhängigkeit der Gesamtenergie E auf. Wählen Sie hierbei als freie Variable t und als unabhängige Variable die Auslenkung $\alpha(t)$.
Hinweis: *Ein Objekt das sich im Kreis mit Radius r und Winkelgeschwindigkeit ω bewegt, hat die Bahngeschwindigkeit $v = r \cdot \omega$.*

b) Ohne die DGL in Teil a) zu lösen (oder zu kennen): Ist die Lösung des zugehörigen Anfangswertproblems mit $\alpha(0) = 0$ eindeutig? Begründen Sie sehr kurz Ihre Antwort.

c) Gewinnen Sie aus Ihrer DGL aus Teil a) eine DGL zweiter Ordnung die unabhängig von der Gesamtenergie ist.
Hinweis: *E ist konstant.*

[1] Die Masse wird hierbei in kg und die Geschwindigkeit in m/s angegeben.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Dienstag den 29. 10. 2024 um 22 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihrer Abgabepartner gut lesbar auf Ihre Abgabe.

Aufgabe 2. (4P+8P)

a) Geben Sie bei den folgenden Differentialgleichungen jeweils an, ob es sich in der gegebenen Form um eine implizite oder explizite Differentialgleichung handelt und geben Sie jeweils die Ordnung an. Geben Sie weiterhin an, ob es sich jeweils um eine lineare DGL handelt und ob diese gegebenenfalls homogen oder inhomogen ist.

   (i) $y'' = \sin(x)y' - 3y + 4$

   (ii) $y^{(2n+1)} \cdot y + y^{(2n)}y' + \cdots + y^{(n+1)}y^{(n)} = 0$

   (iii) $\cos(y') = 3y + 4$

   (iv) $x^n y^{(n)} + x^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + xy' + y = 0$

b) Gegeben ist die DGL

$$y''(y' - y) = 0.$$

Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$y_1(x) = x, \qquad y_2(x) = 42 \quad \text{und} \quad y_3(x) = e^x$$

drei linear unabhängige Lösungen der DGL sind.
Ist der Lösungsraum der DGL ein Vektorraum, d.h. insbesondere abgeschlossen unter Skalarmultiplikation und Addition?

Aufgabe 3. (4P+2P+4P)

a) Geben Sie ein Fundamentalsystem der linearen, homogenen DGL $y^{(n)} \equiv 0$ an.

b) Sei $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine n-mal differenzierbare Funktion deren n-te Ableitung verschwindet, d.h. es gilt $y^{(n)} = 0$. Zeigen Sie, dass dann y bereits ein Polynom von Grad kleiner gleich $n - 1$ ist.

c) Sei nun $p(x)$ eine Polynomfunktion und $t_0 \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann p eindeutig durch ihren Funktionswert und den ihrer Ableitungen $p(t_0), p'(t_0), p''(t_0), \ldots$ an der Stelle t_0 festgelegt ist.
Hinweis: *Ermitteln Sie zuerst den Grad von p anhand der Folge* $(p(t_0), p'(t_0), p''(t_0), \ldots)$.

Aufgabe 4. (4P+4P)

Auf dem Intervall $I := [-\pi, \pi]$ betrachten wir die beiden Funktionen

$$y_1 : I \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sin(x)$$
$$y_2 : I \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x.$$

a) Sind die beiden Funktionen linear unabhängig? Begründen Sie wie immer Ihre Antwort.

b) Existiert eine lineare, homogene, gewöhnliche DGL von Ordnung 2, sodass y_1 und y_2 Lösungen dieser DGL sind?

Das Übungsblatt kann bis spätestens Dienstag den 29. 10. 2024 um 22 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihrer Abgabepartner gut lesbar auf Ihre Abgabe.