Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung 6.1 Mathematik
Dr. C. Steinhart

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

13. Übungsblatt zur Grundzüge der Höheren Mathematik 3 im WS 2024/25

Aufgabe 1. (5P+5P)

a) Ein Volltorus $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{R}^3$ entsteht durch Rotation entlang der x_3-Achse einer (vertikalen) Kreisscheibe von Radius $r > 0$ mit Abstand $R > r$ zum Ursprung. Wir können ihn wie folgt parametrisieren:

$$g : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \times [0, r] \to \mathbb{T} \subseteq \mathbb{R}^3, \qquad \begin{pmatrix} \varphi \\ \theta \\ s \end{pmatrix} \mapsto R \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta) \cdot \cos(\varphi) \\ \cos(\theta) \cdot \sin(\varphi) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie mit Hilfe des Transformationssatzes das Volumen des Torus, indem Sie $\int_{\mathbb{T}} 1 \, dV$ berechnen.

b) Wir betrachten das Ellipsoid

$$E := \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leq 1 \}$$

mit den Hauptachsenlängen $a, b, c \in \mathbb{R}_{>0}$. Berechnen Sie das Trägheitsmoment $\int_E (x^2 + y^2) \, dV$ des Ellipsoids bezüglich der z-Achse, indem Sie die folgenden gestreckten Kugelkoordinaten verwenden:

$$x = a \cdot r \cos(\varphi) \cos(\theta), \quad y = b \cdot r \sin(\varphi) \cos(\theta), \quad z = c \cdot r \sin(\theta)$$

Hinweis: *Sie dürfen die Stammfunktionen für $\sin(x)^2$ und $\cos(x)^2$ einer Formelsammlung Ihrer Wahl entnehmen.*

Aufgabe 2. (3P+5P+5P)

Geben Sie jeweils an, ob die folgenden uneigentlichen Integrale auf $\mathbb{R}^2$ (absolut) konvergieren, bestimmt gegen ∞ oder $-\infty$ divergieren oder unbestimmt divergieren. Geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert bzw. zwei reguläre Ausschöpfungen mit unterschiedlichen Grenzwerten an.

a) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} e^{(x^2+y^2)} \, dV$ b) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{e^{(x^2+y^2)}} \, dV$ c) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \frac{x}{e^y} \, dV$

Das Übungsblatt kann bis spätestens Dienstag den 04. 02. 2025 um 22 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihrer Abgabepartner gut lesbar auf Ihre Abgabe.

Aufgabe 3. (3P+3P+3P+3P)

Wir betrachten die Transformation

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \quad \underline{\mathbf{x}} \mapsto \frac{\underline{\mathbf{x}}}{\|\underline{\mathbf{x}}\|^2}.$$

Seien weiterhin $B_1 := \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \|\underline{\mathbf{x}}\| < 1\}$ die punktierte Einheitskreisscheibe und $M := \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\underline{\mathbf{x}}\| > 1\}$ das Komplement der abgeschlossenen Einheitskreisschreibe.

a) Zeigen Sie, dass φ tatsächlich eine Transformation ist, also bijektiv mit invertierbarer Jacobi-Matrix, und bestimmen Sie die Determinante der Jacobi-Matrix.
Hinweis: *Was ist φ^2?*

b) Zeigen Sie, dass φ bijektiv M auf B_1 abbildet.

c) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $|f(x)| \leq \dfrac{C}{\|x\|^5}$ für alle $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und ein festes $C \in \mathbb{R}_{>0}$. Zeigen Sie, dass dann $\int_{\mathbb{R}^2} f(\underline{\mathbf{x}})\, dV$ absolut konvergiert.

d) Sei f wie in c). Schreiben Sie $\int_{\mathbb{R}^2} f(\underline{\mathbf{x}})\, dV$ als Summe von zwei eigentlichen Integralen. Sie dürfen hierbei benutzen, dass der Transformationssatz auch für beliebige offene Mengen gilt.
Hinweis: *Eine der auftretenden Funktionen ist nur auf B_1 definiert. Zeigen Sie, dass Sie diese stetig in $\underline{\mathbf{0}}$ fortsetzen können.*

Aufgabe 4. (5P)

Wir betrachten auf $\mathbb{R}^2$ die Kurven

$$\gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto t \cdot \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \end{pmatrix} \qquad \gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} 1-t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Skizzieren Sie die beiden Kurven und berechnen Sie mit Hilfe des klassischen Integralsatzes von Stokes in der Ebene den Flächeninhalt der von ihnen berandeten Fläche.
Hinweis: Der klassische Integralsatz von Stokes besagt, dass für ein stetig differenzierbares Vektorfeld $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Gleichung $\int_M \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} dV = \int_\gamma \langle F, d\underline{\mathbf{x}} \rangle$ für eine positive Parametrisierung $\gamma : [a,b] \to \partial M$ gilt.[1]

[1] Siehe kommenden Donnerstag.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Dienstag den 04. 02. 2025 um 22 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihrer Abgabepartner gut lesbar auf Ihre Abgabe.