Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung 6.1 Mathematik
Dr. C. Steinhart

12. Übungsblatt zur Grundzüge der Höheren Mathematik 3 im WS 2024/25

Aufgabe 1. (5P+5P+5 Bonuspunkte)

a) Zeigen Sie, dass das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(x) + y \\ e^y + x + 1 \end{pmatrix}$ konservativ ist und bestimmen Sie ein Potential von F. Berechnen Sie $\int_\gamma \langle F(\underline{\mathbf{x}}), d\underline{\mathbf{x}} \rangle$ für den Weg

$$\gamma : [0,4] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{pmatrix} \sin(\pi t) + \sqrt{t} \\ t^2 - 4t \end{pmatrix}.$$

b) Ein Teilchen mit Masse m das sich durch ein Kraftfeld $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ bewegt, beschreibt den (zweimal stetig differenzierbaren) Weg $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit $\gamma''(t) = \frac{1}{m} F(\gamma(t))$ und hat zum Zeitpunkt t die kinetische Energie

$$E_{kin}(t) := \frac{1}{2} m \cdot \|\gamma'(t)\|^2 = \frac{1}{2} m \cdot \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle.$$

Sei F konservativ mit Potential $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann für alle $t_1 < t_2$ gilt:

$$E_{kin}(t_2) - E_{kin}(t_1) = \varphi(\gamma(t_2)) - \varphi(\gamma(t_1)).$$

Hinweis: *Betrachten Sie die Ableitung von $E_{kin}(t)$ und benutzen Sie den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.*

c) Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld. Zeigen Sie folgende Äquivalenz:
F ist genau dann konservativ, wenn für jeden geschlossenen, stückweise stetig differenzierbaren Weg $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ bereits $\oint_\gamma \langle F(\underline{\mathbf{x}}), d\underline{\mathbf{x}} \rangle = 0$ gilt.

Aufgabe 2. (5P+2P+3P)

a) Für zwei stetig differenzierbare Funktionen $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ betrachten wir das Vektorfeld

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sin(x)y + z^2 + xyz \\ f(x,y,z) \\ g(x,y,z) \end{pmatrix}$$

Können wir $f, g \in C^1(\mathbb{R}^3)$ so wählen, dass F ein konservatives Vektorfeld ist? Falls ja, geben Sie eine entsprechende Lösung f, g an. Ist diese Lösung eindeutig?

b) Wir betrachten das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} xy \\ xy \end{pmatrix}$ zusammen mit dem Weg

$$\gamma : [0,2] \to \mathbb{R}^2 \text{ mit } \gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \text{ für } t \leq 1 \text{ und } \gamma(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-t \end{pmatrix} \text{ für } t \geq 1.$$

(i) Berechnen Sie $\int_\gamma \langle F(\underline{\mathbf{x}}), d\underline{\mathbf{x}} \rangle$.

(ii) Finden Sie einen weiteren Weg $\rho : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ mit $\rho(0) = \gamma(0)$ und $\rho(1) = \gamma(2)$ mit $\int_\gamma \langle F(\underline{\mathbf{x}}), d\underline{\mathbf{x}} \rangle \neq \int_\rho \langle F(\underline{\mathbf{x}}), d\underline{\mathbf{x}} \rangle$. Ist F konservativ?

Das Übungsblatt kann bis spätestens Dienstag den 28. 01. 2025 um 22 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihrer Abgabepartner gut lesbar auf Ihre Abgabe.

Aufgabe 3. (2P+(3P+3P+2P))

Wir betrachten für die beiden abgeschlossenen Kreisschreiben

$$B_2\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} := \{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \| \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \| \leq 2\}, \qquad B_2(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} := \{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \| \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \| \leq 2\}$$

sowie ihren Schnitt $U_1 := B_2\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} \cap B_2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und ihre Vereinigung $U_2 := B_2\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} \cup B_2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

a) Skizzieren Sie U_1 und U_2 und geben Sie jeweils mit einer kurzen Begründung an, ob U_1 und U_2 Normalbereiche in x-Richtung und y-Richtung sind.

b) Schreiben Sie U_1 als Normalbereich und berechnen Sie die Integrale

$$\int_{U_1} x^2|y|\,dV \qquad \text{und} \qquad \int_{U_1} xy\,dV.$$

Aufgabe 4. (5P+5P)

Wir betrachten auf dem offenen Einheitsquadrat $D := \{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x, y < 1\}$ die Funktion

$$f : D \to \mathbb{R}, \qquad \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mapsto \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

a) Zeigen Sie, dass die beiden Funktionen

$$g : (0,1) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_0^1 f(x,y)dy \qquad \text{und} \qquad h : (0,1) \to \mathbb{R}, \quad y \mapsto \int_0^1 f(x,y)dx.$$

wohldefiniert sind und berechnen Sie diese.
Hinweis: *Betrachten Sie die Ableitung von $\frac{x}{a^2+x^2}$ für $a \in \mathbb{R}$ und benutzen Sie wieder einmal den Hauptsatz.*

b) Berechnen Sie die beiden Doppelintegrale

$$\int_0^1 \Big(\int_0^1 f(x,y)dy\Big)dx \qquad \text{und} \qquad \int_0^1 \Big(\int_0^1 f(x,y)dx\Big)dy.$$

Warum gilt hier der Satz von Fubini nicht?
Hinweis: *Letztes Blatt könnte für eine Stammfunktion helfen.*

Das Übungsblatt kann bis spätestens Dienstag den 28. 01. 2025 um 22 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihrer Abgabepartner gut lesbar auf Ihre Abgabe.