Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung 6.1 Mathematik
Dr. C. Steinhart

11. Übungsblatt zur Grundzüge der Höheren Mathematik 3 im WS 2024/25

Aufgabe 1. (5P+5P)

a) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $\nabla f(\underline{\mathbf{x}}) \neq 0$ für alle $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass die Nullstellenmenge

$$F := \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\underline{\mathbf{x}}) = 0\}$$

von f eine Fläche ist, d.h. für jedes ${}^{(0)}\underline{\mathbf{x}} \in F$ existieren offene Mengen $U \in \mathbb{R}^2$ und $V \subseteq \mathbb{R}^3$ mit ${}^{(0)}\underline{\mathbf{x}} \in V \cap F$ und eine bijektive, stetig differenzierbare Funktion $h : U \to V \cap F$.
Hinweis: *Verwenden Sie den Satz über implizite Funktionen um eine Funktion $\tilde{h} : V_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \to F$ zu finden und begründen Sie anschließend dass diese tatsächlich stetig differenzierbar und bijektiv auf eine offene Teilmenge von F abbildet.*

b) Sei $U := U_1 \times U_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $f, g \in C^1(U)$ zwei stetig differenzierbare Funktionen. Sei weiterhin $(x_0, y_0) \in U$ mit

$$f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) \text{ und } \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Zeigen Sie, dass dann ein nicht-konstanter Weg $\gamma : I \to U$ existiert mit $f(\gamma(t)) = g(\gamma(t))$ für alle $t \in I$. Stimmt die Aussage auch entsprechend, wenn $f, g \in C^1(\mathbb{R}^3)$ liegen mit

$$f({}^{(0)}\underline{\mathbf{x}}) = g({}^{(0)}\underline{\mathbf{x}}) \text{ und } \nabla f({}^{(0)}\underline{\mathbf{x}}) \neq \nabla g({}^{(0)}\underline{\mathbf{x}})?$$

Aufgabe 2. (4P+3P+3P+3Bonuspunkte)

Wir betrachten auf $\mathbb{R}^2$ die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1^2 x_2 \\ x_1 x_2 + x_2 \end{pmatrix}$ zusammen mit den Punkten

$${}^{(1)}\underline{\mathbf{x}} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad {}^{(2)}\underline{\mathbf{x}} := \begin{pmatrix} -1/2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass f bei ${}^{(1)}\underline{\mathbf{x}}$ und ${}^{(2)}\underline{\mathbf{x}}$ lokal invertierbar ist. Hat f eine globale Inverse?

b) Sei $V \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Umgebung von $\underline{\mathbf{0}}$. Zeigen Sie, dass $f|_V$ nicht injektiv ist. Folgern Sie dass f keine lokale Inverse bei $\underline{\mathbf{0}}$ hat.

c) Seien h_1, h_2 lokale Inversen von f bei ${}^{(1)}\underline{\mathbf{x}}$ und ${}^{(2)}\underline{\mathbf{x}}$. Bestimmen Sie die Ableitungen von h_1 und h_2 bei ${}^{(1)}\underline{\mathbf{y}} := f({}^{(1)}\underline{\mathbf{x}})$ bzw. ${}^{(2)}\underline{\mathbf{y}} := f({}^{(2)}\underline{\mathbf{x}})$.

d) Zeigen Sie, dass die Tangensfunktion lokal invertierbar ist und die (lokale) Umkehrfunktion arctan die Ableitung $\arctan'(y) = \dfrac{1}{1 + y^2}$ besitzt.
Hinweis: *Drücken Sie* $\tan'(x)$ *als Summe/Produkt von* $y = \tan(x)$ *und Konstanten aus.*

Das Übungsblatt kann bis spätestens Dienstag den 21. 01. 2025 um 22 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihrer Abgabepartner gut lesbar auf Ihre Abgabe.

Aufgabe 3. (je 2P)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ und $g : U \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zweimal stetig differenzierbare Funktionen und $F, G : U \to \mathbb{R}^3$ zweimal stetig differenzierbare Vektorfelder. Zeigen Sie folgende Gleichungen:

a) $\operatorname{grad}(\frac{f}{g}) = \dfrac{g \cdot \operatorname{grad}(f) - f \cdot \operatorname{grad}(g)}{g^2}$

b) $\operatorname{div}(F \times G) = \langle G, \operatorname{rot}(F)\rangle - \langle F, \operatorname{rot}(G)\rangle$

c) $\operatorname{rot}(f \cdot F) = f \cdot \operatorname{rot}(F) - F \times \operatorname{grad}(f)$

d) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}(f)) = \underline{\mathbf{0}}$

e) $\operatorname{div}(\operatorname{rot}(F)) = 0.$

Aufgabe 4. (2P+3P+3P+2P)

Wir betrachten auf $U := \mathbb{R}^2 \setminus \{\underline{\mathbf{0}}\}$ das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$B : U \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

und auf $V := \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\} \subseteq U$ die (unendlich oft differenzierbare) Funktion

$$b : V \to \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

a) Skizzieren Sie B (mit mindestens 8 Pfeilen).

b) Berechnen Sie $\operatorname{div}(B)(\underline{\mathbf{x}})$ und $\operatorname{rot}(B)(\underline{\mathbf{x}})$.

c) Zeigen Sie, dass $B(\underline{\mathbf{x}}) = \operatorname{grad}(b)(\underline{\mathbf{x}})$ für $\underline{\mathbf{x}} \in V$ gilt und berechnen Sie $\Delta b(\underline{\mathbf{x}})$.

d) Berechnen Sie in Abhängigkeit von $r \in \mathbb{R}_{>0}$ für den Weg

$$\gamma : [0, \frac{\pi}{4}] \to V, \quad \omega \mapsto r \cdot \begin{pmatrix} \cos(\omega) \\ \sin(\omega) \end{pmatrix} \qquad \text{das Wegintegral} \qquad \int_\gamma b(\underline{\mathbf{x}}) d\underline{\mathbf{x}}$$

Das Übungsblatt kann bis spätestens Dienstag den 21. 01. 2025 um 22 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihrer Abgabepartner gut lesbar auf Ihre Abgabe.