Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung 6.1 Mathematik
Dr. C. Steinhart

10. Übungsblatt zur Grundzüge der Höheren Mathematik 3 im WS 2024/25

Aufgabe 1. (5P+4P+4P+3Bonspunkte)

a) Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x^2 \cdot y + x - 3$$

und ${}^{(0)}\underline{\mathbf{x}} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ das Taylor-Polynom $T_n f(\underline{\mathbf{x}}; {}^{(0)}\underline{\mathbf{x}})$ von Ordnung n zum Entwicklungspunkt ${}^{(0)}\underline{\mathbf{x}} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Was erhalten Sie, wenn Sie $T_3 f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; {}^{(0)}\underline{\mathbf{x}})$ ausmultiplizieren?

b) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom von Grad 3 von der Funktion

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \sin(x \cdot y + y).$$

c) Sei $R(x, y) := T_3 g(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; 0) - g(x, y)$ die Differenz des Taylor-Polynoms zu g aus Teil b). Zeigen Sie, dass dann eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ existiert, sodass für alle x, y mit $\varepsilon := \max\{|x|, |y|\} \leq 1$ bereits $|R(x, y)| < C \cdot \varepsilon^4$ gilt.
Sie erhalten 3 Bonuspunkte wenn Sie solch ein C mit entsprechender Begründung angeben.

Aufgabe 2. (4P+3P+4P+3P)

Wir betrachten auf $\mathbb{R}^3$ die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \mapsto x^3 - 3x + 2yz^2 - y^2 - 2z^2.$$

a) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f.

b) Berechnen Sie die Hesse-Matrix von f in Abhängigkeit von $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

c) Geben Sie bei allen kritischen Punkten von f an, ob es sich jeweils um ein lokales Maximum, um ein lokales Minimum oder um einen Sattelpunkt handelt.

d) Begründen Sie kurz, ob f globale Extremstellen besitzt.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Dienstag den 14. 01. 2025 um 22 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihrer Abgabepartner gut lesbar auf Ihre Abgabe.

Aufgabe 3. (2P+3P+8P)

Auf der abgeschlossene Einheitskugel in $\mathbb{R}^3$

$$\overline{U} := \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\underline{\mathbf{x}}\| \leq 1\}$$

sei die folgende Funktion gegeben:

$$f : \overline{U} \to \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \mapsto x + 3y^2 + 4yz.$$

a) Zeigen Sie, dass f im Inneren der Kugel $U := \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\underline{\mathbf{x}}\| < 1\}$ keine lokalen Extremstellen besitzt.

b) Begründen Sie, dass f auf $\overline{U}$ ein globales Maximum besitzt.

c) Berechnen Sie alle globalen Extremstellen von f.
Hinweis: *Die Elemente auf ∂U sind gerade die Elemente $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3$ mit $\|\underline{\mathbf{x}}\|^2 = 1$. Finden Sie mögliche Extremstellen mit Hilfe des Lagrange-Multiplikators.*

Das Übungsblatt kann bis spätestens Dienstag den 14. 01. 2025 um 22 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihrer Abgabepartner gut lesbar auf Ihre Abgabe.