Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung 6.1 Mathematik
Dr. C. Steinhart

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

9. Übungsblatt zur Grundzüge der Höheren Mathematik 3 im WS 2024/25

Aufgabe 1. (6P+4P)

Wir betrachten den folgenden stückweise parametrisierte Weg $\gamma : [-8,8] \to \mathbb{R}^2$ mit:

$$\gamma|_{[0,1]} : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} 2t^3 \\ 4-2t^2 \end{pmatrix} \qquad \gamma|_{[1,2]} : [1,2] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} 2+\cos(\pi/2 \cdot t) \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\gamma|_{[2,3]} : [2,3] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} \cos(\pi/2 \cdot (t-2)^2) \\ \sin(\pi/2 \cdot (t-2)^2) \end{pmatrix} \qquad \gamma|_{[3,5]} : [3,5] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} 2-(t-4)^3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma|_{[5,8]} : [5,8] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 5-t \end{pmatrix} \qquad \text{sowie } \gamma(-t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \gamma(t) = \begin{pmatrix} -\gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix} \text{ für alle } t \geq 0.$$

a) Skizzieren Sie die Spur von γ.

b) Markieren Sie alle Punkte in denen γ nicht differenzierbar ist mit einem großen grünen Punkt und alle singulären Punkte von γ mit einem großen roten Punkt.

Aufgabe 2. (3P+3P)

Für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ sei die Kurve

$$\gamma : [0,L] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\text{mit} \quad \gamma_1 : [0,L] \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \int_0^t \cos(c \cdot x^2)dx$$

$$\text{und} \quad \gamma_2 : [0,L] \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \int_0^t \sin(c \cdot x^2)dx$$

gegeben.

a) Zeigen Sie, dass γ rektifizierbar und sogar nach Bogenlänge parametrisiert ist.

b) Bestimmen Sie die Krümmung von γ zum Zeitpunkt t. Wie verhält sich die Krümmung zur Bogenlänge?

Das Übungsblatt kann bis spätestens Dienstag den 07. 01. 2025 um 22 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihrer Abgabepartner gut lesbar auf Ihre Abgabe.

Aufgabe 3. (4P+4P)

Für eine reguläre Kurve $\gamma : I \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

in der Ebene findet sich manchmal auch die folgende Definition von (orientierter) Krümmung:

$$\kappa(t) := \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}}.$$

a) Zeigen Sie, dass der Betrag dieser Krümmung mit unserer Definition von Krümmung übereinstimmt.
Hinweis: *Berechnen Sie die Krümmung wie in der Vorlesung. Bei der Berechnung von $\gamma_N''(t)$ können Sie den Term „$x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)$" ausklammern.*

b) Zeigen Sie, dass die Krümmung invariant unter C^2-Umparametrisierung ist, d.h.:

Sei $\psi : J \to I$ eine orientierungserhaltende C^2-Umparametrisierung, d.h. ψ und ψ^{-1} sind zweimal stetig differenzierbar, und $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \psi$. Zeigen Sie, dass die Krümmung von γ bei t gerade die Krümmung von $\tilde{\gamma}$ bei $\tau = \psi^{-1}(t)$ ist. Was passiert, wenn ψ die Orientierung umkehrt?
Bemerkung: *Sie dürfen entweder obige Definition von Krümmung für ebene Kurven oder die Definition aus der Vorlesung benutzen.*

Aufgabe 4. (4P+4P)

Für zwei Multiindizes α und β betrachten wir die beiden Polynomfunktionen

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\mathbf{x}}^\beta \quad \text{und} \quad g(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\mathbf{x}}^\alpha.$$

a) Bestimmen Sie für $\alpha = (1, 3, 0)$ und $\beta = (4, 3, 2)$ die Werte $D^\alpha f(2, -1, \frac{1}{2})$ sowie $D^\beta g(3, 2, 1)$.

b) Für zwei Multiindizes $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ und $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ schreiben wir $\alpha \geq \beta$, falls für alle $i = 1, \ldots, n$ bereits $\alpha_i \geq \beta_i$ gilt. In diesem Falle ist

$$\alpha - \beta := (\alpha_1 - \beta_1, \ldots, \alpha_n - \beta_n).$$

Geben Sie jeweils für $\alpha \geq \beta$ und $\alpha \ngeq \beta$ die Funktion $D^\beta g(\underline{\mathbf{x}})$ mit Hilfe von α und β an.
Hinweis: *Benutzen Sie die Gleichung $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (k+1) = \frac{n!}{k!}$.*

Das Übungsblatt kann bis spätestens Dienstag den 07. 01. 2025 um 22 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihrer Abgabepartner gut lesbar auf Ihre Abgabe.

Aufgabe 5. (3P+5P+5 Bonuspunkte)

Der Kauz Ferdinand möchte gerne Charlotte ein Weihnachtsgeschenk ins Nest werfen, dazu stellt er folgende Berechnungen an. Er erinnert sich, dass geworfene Gegenstände einer Parabel folgen und die horizontale Geschwindigkeit konstant ist. Entsprechend stellt er als Weg folgende Parametrisierung[1] auf:

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto {}^{(0)}\underline{\mathbf{x}} + t \cdot {}^{(0)}\underline{\mathbf{v}} + t^2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Die geplante Flugbahn von Ferdinand lässt sich mit dem Weg

$$\rho : [0,4] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} 5 \cdot t \\ t^2 \end{pmatrix}$$

beschreiben, wobei sich Charlottes Nest an den Koordinaten $\begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix}$ befindet.

a) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Wurfparabel γ mit der x-Achse $\{\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}\}$ in Abhängigkeit der Startwerte $\gamma(0)$ und $\gamma'(0)$.

b) Zu welchem Zeitpunkt t muss Ferdinand sein Geschenk loslassen, damit es in Charlottes Nest landet?
Hinweis: *Zum Zeitpunkt des Loslassens fliegt das Geschenk mit der Geschwindigkeit von Ferdinand und in Form einer Wurfparabel γ. Beachten Sie, dass hier nur einer der beiden Aufschlagpunkte der Parabel Sinn macht.*

c) Da Ferdinand während dem Fliegen nicht auf die Uhr schauen kann, hat er nun folgende Frage: Könnt ihr ihm einen Flugweg $\tilde{\rho} : [0, \infty) \to \mathbb{R}^2$ geben, so dass egal zu welchem Zeitpunkt er das Geschenk loslässt das Geschenk immer in Charlottes Nest landet? Da Ferdinand das Geschenk erst aufsammeln muss, benötigen wir hier $\tilde{\rho}(0) = \underline{\mathbf{0}}$. Was wird wohl Charlotte von dieser Flugbahn halten?

Frohe Feiertage und einen guten Rutsch ins neue Jahr!

[1] Wir verwenden hier die SI Einheiten und als Erdbeschleunigung $g = 10m/s^2$. Der Einfachheit halber lassen wir die Einheiten in den Formeln weg.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Dienstag den 07. 01. 2025 um 22 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihrer Abgabepartner gut lesbar auf Ihre Abgabe.