Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung 6.1 Mathematik
Dr. C. Steinhart

8. Übungsblatt zur Grundzüge der Höheren Mathematik 3 im WS 2024/25

Aufgabe 1. (7P)

Wir betrachten die Abbildungen

$$f : (0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \log(x_1) \\ \frac{x_2}{x_1} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y_1 - y_2 \\ y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich der Verkettung $h := f \circ g$ und berechnen Sie die Jacobi-Matrix von h mit Hilfe der Kettenregel. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie h direkt ableiten.

Aufgabe 2. (3P+6P+2P)

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} \arcsin\left(\frac{2xy}{x^2+y^2}\right) & , \text{ falls } x, y \neq 0 \\ 0 & , \text{ falls } x = y = 0 \end{cases}$$

a) Ist f bei $\underline{\mathbf{0}}$ total differenzierbar? Begründen Sie wie immer Ihre Antwort.

b) Bestimmen Sie die Ableitung von f bei $\underline{\mathbf{x}} \neq \underline{\mathbf{0}}$ indem Sie Polarkoordinaten verwenden.
Hinweis: *Eventuell könnte eines der Additionstheoreme bei der Berechnung helfen.*

c) Berechnen Sie mit Hilfe des Gradienten aus b) die Richtungsableitung $D_v f(\underline{\mathbf{x}})$ von f an der Stelle $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und in Richtung $v := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Dienstag den 17. 12. 2024 um 22 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihrer Abgabepartner gut lesbar auf Ihre Abgabe.

Aufgabe 3. (4P+2*3P)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ eine stetig differenzierbare Funktion und $a \in \mathrm{Bild}(f)$. Wir bezeichnen als *Höhenlinie* bzw. Niveaumenge von f zum Niveau a die Menge

$$\mathcal{N}_f(a) := f^{-1}(a) = \{\underline{\mathbf{x}} \in U \mid f(\underline{\mathbf{x}}) = a\}.$$

a) Sei $\gamma : I \to \mathcal{N}_f(a)$ ein differenzierbarer Weg entlang der Höhenlinie (bzw. innerhalb der Niveaumenge). Zeigen Sie, dass dann der Tangentialvektor von γ bei t stets orthogonal zur Ableitung von f bei $\gamma(t)$ ist.
Hinweis: *Differenzieren Sie $f \circ \gamma$ mit und ohne Kettenregel.*

b) Skizzieren Sie jeweils für die beiden Funktionen

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x^2 + y^2$$

$$f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x^2y^2 - y^2$$

die Niveaumengen in $\mathbb{R}^2$ zum Niveau 1 und geben Sie falls möglich eine differenzierbare Kurve $\gamma_i : I \to \mathbb{R}$ mit $\mathrm{Spur}(\gamma_i) = \mathcal{N}_{f_i}(1)$ an.

Aufgabe 4. (2P+4P+3P+3P)

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \sin(xy \cdot \pi) + x^2 + y^2 \qquad \text{und der Vektor} \quad \underline{\mathbf{x}} := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

a) Bestimmen Sie die Ableitung von f. Was ist $D_f(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix})$?

b) Der Graph von f ist eine parametrisierte Fläche

$$F := \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Zeigen Sie, dass $\underline{\mathbf{x}} \in F$ gilt und finden Sie eine Tangente $g(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, t \mapsto v_0 + tv$ von F in $\underline{\mathbf{x}}$ mit $v_0, v \in \mathbb{R}^3$.
Hinweis: *Für einen Weg $\gamma : \mathbb{R} \to F$ ist die dritte Komponente $\gamma_3(t)$ bereits eindeutig durch $\gamma_1(t)$ und $\gamma_2(t)$ festgelegt.*

c) Bestimmen Sie die Tangentialebene $T_{\underline{\mathbf{x}}}F$ von F an der Stelle $\underline{\mathbf{x}}$.

d) Finden Sie zwei Einheitsvektoren $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \in T_{\underline{\mathbf{x}}}F$, d.h. es gilt $\|v\| = \|w\| = 1$, sodass $w_3 = 0$ gilt und v_3 maximal wird.
Hinweis: *Wie hängen v und w mit $D_f(\underline{\mathbf{x}})$ zusammen?*

Das Übungsblatt kann bis spätestens Dienstag den 17. 12. 2024 um 22 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihrer Abgabepartner gut lesbar auf Ihre Abgabe.