Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung 6.1 Mathematik
Dr. C. Steinhart

7. Übungsblatt zu Grundzüge der Höheren Mathematik 3 im WS 2024/25

Aufgabe 1. (2P+4P+3P+2P+3P)

Wir möchten die folgende Gleichung

$$9x^2 + 24xy + 16y^2 + 20x - 15y = 50$$

in $\mathbb{R}^2$ lösen. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

a) Schreiben Sie die Lösungsmenge der Gleichung in Form einer Quadrik

$$Q := \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 \mid \underline{\mathbf{x}}^T A \underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{b}}^T \underline{\mathbf{x}} = 50\}$$

für eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und einen Vektor $\underline{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^2$.

b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenräume von A.

c) Finden Sie eine orthogonale Matrix $S \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, d.h. es gilt $S^T = S^{-1}$, sodass $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat.

d) Seien ${}^{(1)}\underline{\mathbf{v}}, {}^{(2)}\underline{\mathbf{v}}$ die Spaltenvektoren von $S = ({}^{(1)}\underline{\mathbf{v}} \ \ {}^{(2)}\underline{\mathbf{v}})$. Die Koordinatendarstellung eines Vektors $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2$ bezüglich der Basis $({}^{(1)}\underline{\mathbf{v}}, \ {}^{(2)}\underline{\mathbf{v}})$ ist

$$\underline{\mathbf{x}} = \xi_1 \cdot {}^{(1)}\underline{\mathbf{v}} + \xi_2 \cdot {}^{(2)}\underline{\mathbf{v}} = S \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

mit $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$. Welche Gleichung müssen $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ erfüllen, wenn $\underline{\mathbf{x}} \in Q$ gilt?

e) Skizzieren Sie die Menge $Q \subseteq \mathbb{R}^2$. Zeichnen Sie dabei die übliche Koordinatenachsen der Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ als auch die neue Koordinatenachsen der Basis $({}^{(1)}\underline{\mathbf{v}}, \ {}^{(2)}\underline{\mathbf{v}})$ ein.

Aufgabe 2. (4P)

Wir betrachten die Funktion:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} x \cdot \cos(1/y) & , \text{ falls } y \neq 0 \\ 0 & , \text{ falls } y = 0 \end{cases}$$

Geben Sie jeweils an, ob f in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ stetig ist und begründen Sie Ihre Antwort.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Dienstag den 10. 12. 2024 um 22 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihrer Abgabepartner gut lesbar auf Ihre Abgabe.

Aufgabe 3. (3P+3P+4P)

a) Seien $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ zwei Funktionen für $n, m, k \in \mathbb{N}$. Seien weiterhin F stetig in $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ und G stetig in $F(\underline{\mathbf{x}})$. Zeigen Sie, dass dann auch $G \circ F$ stetig in $\underline{\mathbf{x}}$ ist. Folgern Sie, dass wenn F und G stetig sind, auch $G \circ F$ stetig ist.

b) Wir nennen eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *wegzusammenhängend*, falls für alle $\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \in U$ eine stetige Funktion $\gamma : [0,1] \to U$ mit $\gamma(0) = \underline{\mathbf{x}}$ und $\gamma(1) = \underline{\mathbf{y}}$ existiert.
Sei wieder $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass das Bild $F(U) \subseteq \mathbb{R}^m$ einer wegzusammenhängenden Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ wieder wegzusammenhängend ist.
Hinweis: *Betrachten Sie für zwei Elemente in $F(U)$ jeweils eins ihrer Urbilder.*

c) Sei

$$K := \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \mid |x_i| \leq 1 \text{ für alle } 1 \leq i \leq n \}$$

ein abgeschlossenes Quadrat in $\mathbb{R}^n$, also insbesondere kompakt, und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass das Bild $f(K) = [a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall ist.
Hinweis: *Eine Möglichkeit wäre, zuerst a und b als zwei besondere Werte von f zu wählen.*

Aufgabe 4. (3P+3P+4P+2P)

Wir betrachten auf $\mathbb{R}^2$ die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} \sqrt{x_1 \cdot x_2} & , \text{ falls } x_1 \cdot x_2 \geq 0 \\ -\sqrt{-x_1 \cdot x_2} & , \text{ falls } x_1 \cdot x_2 < 0 \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass f auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig ist.

b) Bestimmen Sie im Punkt $\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ die Richtungsableitung $D_v f(\underline{\mathbf{x}})$ bezüglich dem allgemeinen Vektor $v := \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

c) Ist f in $\underline{\mathbf{0}}$ partiell differenzierbar? Geben Sie gegebenenfalls die partielle Ableitungen an. Welche Richtungsableitungen besitzt f in $\underline{\mathbf{0}}$?

d) Geben Sie die maximale Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^2$ an, auf der f partiell differenzierbar ist. Begründen Sie wie immer Ihre Antwort.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Dienstag den 10. 12. 2024 um 22 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihrer Abgabepartner gut lesbar auf Ihre Abgabe.